2015-2

Grupo 2

UNIVERSIDAD DEL NORTE

# UNIVERSIDAD DEL NORTE
## PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO III (ANEC)
## AGOSTO 26 DE 2015

Nombre: Solucionario.

1. Evalúe la derivada parcial dada.

$$g(x,y,z) = \frac{3x^2y^2+2xy+x-y}{xy-yz+xz}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(1,1,5).$$

2. La función de costos conjuntos para fabricar $q_A$ unidades del producto $A$ y $q_B$ unidades del producto $B$ está dada por

$$c = \frac{q_A^2(q_B^3+q_A)^{1/2}}{17} + q_A q_B^{1/3} + 600$$

donde $c$ está en dólares.
($a$) Encuentre las funciones de costo marginal con respecto a $q_A$ y $q_B$.
($b$) Evalúe la función de costo marginal con respesto a $q_A$ cuando $q_A = 17$ y $q_B = 8$.
($c$) Use su respuesta al inciso ($a$) para estimar el cambio en el costo si la producción de $A$ disminuye de 17 a 16 unidades mientras la producción de $B$ se mantiene en 8 unidades.

3. Para $z = \ln(x^2+y^2)$, muestre que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4. Para un fabricante de cámaras y películas, el costo total $c$ de producir $q_C$ cámaras y $q_F$ rollos de película está dado por

$$c = 30q_C + 0{,}015q_Cq_F + q_F + 900$$

Las funciones de demanda para las cámaras y los rollos fotográficos están dadas por

$$q_C = \frac{9000}{p_C\sqrt{p_F}} \qquad \text{y} \qquad q_F = 2000 - p_C - 400p_F$$

donde $p_C$ es el precio por cámara y $p_F$ el precio por rollo de película. Encuentre la tasa de cambio del costo total con respecto al precio de la cámara cuando $p_C = 50$ y $p_F = 2$.

(1)

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{(6x^2y+2x-1)(xy-yz+xz)-(3x^2y^2+2xy+x-y)\cdot(x-z)}{(xy-yz+xz)^2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(1,1,5)}=\frac{(6+2-1)(1-5+5)-(3+2+1-1)(1-5)}{(1-5+5)^2}$$

$$=\frac{7+20}{1}=27.$$

(2)

$$C=\frac{q_A^2(q_B^3+q_A)^{1/2}}{17}+q_A q_B^{1/3}+600$$

(a)
$$\frac{\partial C}{\partial q_A}=\frac{2q_A(q_B^3+q_A)^{1/2}+q_A^2\cdot 1/2\,(q_B^3+q_A)^{-1/2}\cdot 1}{17}+q_B^{1/3}$$

$$=\frac{2q_A(q_B^3+q_A)^{1/2}+1/2\,q_A^2(q_B^3+q_A)^{-1/2}}{17}+q_B^{1/3}$$

$$\frac{\partial C}{\partial q_B}=\frac{q_A^2\cdot 1/2\,(q_B^3+q_A)^{-1/2}\cdot 3q_B^2}{17}+\frac{1}{3}q_A q_B^{-2/3}$$

$$=\frac{3}{34}q_A^2q_B^2(q_B^3+q_A)^{-1/2}+\frac{1}{3}q_Aq_B^{-2/3}$$

(b)
$$\left.\frac{\partial C}{\partial q_A}\right|_{q_A=17\,\wedge\,q_B=8}$$

$$=\frac{2\cdot 17(8^3+17)^{1/2}+1/2\,(17)^2(8^3+17)^{-1/2}}{17}+8^{1/3}$$

$$=\frac{782+289/46}{17}+2=\frac{36261/46}{17}+2$$

$$=\frac{2133}{46}+2=\frac{2225}{46}\approx 48{,}37$$

(c) Al reducir la producción de A de 17 a 16 unidades permaneciendo la producción de B en 8 unidades, el costo disminuye aproximadamente 48,37.

(3) $z=\ln(x^2+y^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Puede probarse que $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Entonces

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(4)

$$\frac{\partial C}{\partial P_c}=\frac{\partial C}{\partial q_c}\cdot\frac{\partial q_c}{\partial P_c}+\frac{\partial C}{\partial q_F}\cdot\frac{\partial q_F}{\partial P_c}$$

$$=(30+0{,}015\,q_F)\cdot\left(\frac{-9000}{P_c^2\sqrt{P_F}}\right)$$

$$+(0{,}015\,q_c+1)\cdot(-1)$$

$$=\left[30+0{,}015\,(2000-P_c-400P_F)\right]\cdot\left(\frac{-9000}{P_c^2\sqrt{P_F}}\right)$$

$$+\left[0{,}015\cdot\frac{9000}{P_c\sqrt{P_F}}+1\right]\cdot(-1)$$

Entonces

$$\left.\frac{\partial C}{\partial P_c}\right|_{(50,2)}=\frac{189}{4}\cdot\left(\frac{-9000}{50^2\sqrt{2}}\right)$$

$$-\frac{20+27\sqrt{2}}{20}=-123{,}188$$

2015-2
Grupo 1

UNIVERSIDAD DEL NORTE

# UNIVERSIDAD DEL NORTE
## PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO III (ANEC)
## AGOSTO 27 DE 2015

Nombre: Solucionario

1. Evalúe las derivadas parciales dadas.

$$z = \frac{x^2+y^2}{e^{x^2+y^2}}; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}$$

2. Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados $A$ y $B$ están dados por

$$q_A = 10\sqrt{\frac{p_B}{p_A}} \qquad \text{y} \qquad q_B = 3\sqrt[3]{\frac{p_A}{p_B}}$$

donde $q_A$ y $q_B$ son las cantidades demandadas de $A$ y de $B$ y $p_A$ y $p_B$ son los precios correspondientes por unidad.
$a$) Encuentre los valores de las dos demandas marginales para el producto $A$ cuando $p_A = 9$ y $p_B = 16$.
$b$) Si $p_B$ se reduce de 14 a 16, con $p_A$ fijo en 9, use el inciso $a$) para estimar el cambio correspondiente en la demanda para el producto $A$.

3. Suponga que el costo $c$ de producir $q_A$ unidades del producto $A$ y $q_B$ unidades del producto $B$ está dado por

$$c = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{1/3}$$

que las funciones de demanda acopladas para los productos están dadas por

$$q_A = 10 - p_A + p_B^2$$

y que

$$q_B = 20 + p_A - 11p_B$$

Encuentre el valor de

$$\frac{\partial^2 c}{\partial q_A \partial q_B}$$

cuando $p_A = 25$ y $p_B = 4$.

4. Encuentre la derivada indicada usando regla de la cadena.

$$w = \ln(xyz), \quad x = r^2 s, \quad y = rs, \quad z = rs^2; \quad \partial w/\partial r.$$

(1) $z = \dfrac{x^2+y^2}{e^{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x(e^{x^2+y^2}) - (x^2+y^2)\cdot e^{x^2+y^2}\cdot 2x}{(e^{x^2+y^2})^2}$$

Entonces

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y(e^{x^2+y^2}) - (x^2+y^2)\cdot e^{x^2+y^2}\cdot 2y}{(e^{x^2+y^2})^2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)} = \frac{2e^2-4e^2}{e^4} = \frac{-2e^2}{e^4} = \frac{-2}{e^2}$$

$\approx -0{,}27$

(2) $q_A = 10\sqrt{P_B}\cdot\dfrac{1}{(P_A)^{1/2}}$

$q_B = \dfrac{3}{\sqrt[3]{P_B}}\cdot(P_A)^{1/3}$

Entonces

a) $$\frac{\partial q_A}{\partial P_A} = 10\sqrt{P_B}\cdot\frac{-1/2}{(P_A)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial q_A}{\partial P_A}\right|_{(9,16)} = 10\cdot 4\cdot\frac{(-1/2)}{27} = \frac{-20}{27} \approx -0{,}74$$

Y,

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} = \frac{10}{2\sqrt{P_B}}\cdot\frac{1}{\sqrt{P_A}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial q_A}{\partial P_B}\right|_{(9,16)} = \frac{10}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \approx 0{,}41\bar{6}$$

b) $\dfrac{\partial q_A}{\partial P_B} = \dfrac{5}{12}$ significa que la demanda de $q_A$ decrece en aproximadamente $5/12$ cuando $P_A = 9$ (fijo) y $P_B$ se reduce de 16 a 15. Entonces si $P_B$ se reduce de 16 a 14, entonces $q_A$ decrece aproximadamente en $\frac{5}{12}\cdot 2 = \frac{5}{6}$.

(3) $C = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{1/3}$

$$\frac{\partial C}{\partial q_B} = \frac{1}{3}(3q_A^2+q_B^3+4)^{-2/3}\cdot 3q_B^2$$
$$= q_B^2(3q_A^2+q_B^3+4)^{-2/3}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q_A\partial q_B} = q_B^2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(3q_A^2+q_B^3+4)^{-5/3}\cdot 6q_A$$
$$= -4q_Aq_B^2(3q_A^2+q_B^3+4)^{-5/3}$$

Si $P_A = 25$ y $P_B = 4$, entonces $q_A = 1$ y $q_B = 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 C}{\partial q_A\partial q_B} = -4\cdot(8)^{-5/3} = -\frac{1}{8}.$$

(4) $w = \ln(xyz)$ ; $x = r^2s$, $y = rs$, $z = rs^2$; $\dfrac{\partial w}{\partial r}$.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$
$$= \frac{1}{\cancel{x}yz}\cdot \cancel{yz}\cdot 2rs + \frac{1}{x\cancel{y}z}\cdot\cancel{xz}\cdot s + \frac{1}{xy\cancel{z}}\cdot\cancel{xy}\cdot s^2$$
$$= \frac{1}{r^2s}\cdot 2rs + \frac{1}{rs}\cdot s + \frac{1}{rs^2}\cdot s^2$$
$$= \frac{2}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{4}{r}.$$