Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 201610
Fila B
February 20, 2016

Nombre completo: Solucionario.

1. (a) Si $f(x,y) = ye^{x/y}$, pruebe que $xf_{xy} + yf_{yy} = 0$.

   (b) Si $se^{r^2+u^2} = u\ln(t^2+1)$, determine $\dfrac{\partial t}{\partial u}$.

---

2. Suponga que una función de producción está dada por $p = \dfrac{k\ell}{2k+2\ell}$.

   (a) Determine las funciones de productividad marginal.

   (b) Demuestre que cuando $k = \ell$, la suma de las productividades marginales es $\dfrac{1}{4}$.

---

3. Un fabricante estima que la producción anual de su fábrica está dada por

$$Q(k,\ell) = 30k^{3/10}\ell^{7/10} \quad \text{unidades},$$

donde k es el capital en unidades de mil y ℓ es la fuerza laboral medida en horas-trabajador.

   (a) Encuentre la productividad marginal del capital y la productividad marginal del trabajo, cuando el capital es \$ 630.000 y el nivel de la fuerza laboral es 830 horas-trabajador.

   (b) ¿Debe el fabricante considerar invertir en capital o aumentar el nivel de fuerza laboral para aumentar la producción tan rápidamente como sea posible? Justifique claramente su respuesta.

---

4. Las ecuaciones de demanda para los productos A y B están dadas por

$$q_A = \frac{100\sqrt{p_B}}{p_A^2} \quad \text{y} \quad q_B = \frac{500\sqrt[3]{p_A}}{\sqrt{p_B^3}},$$

respectivamente, donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y B, y p_A y p_B son los precios correspondientes por unidad.

   (a) Encuentre las cuatro funciones de demanda marginal e interprtelas.

   (b) Determine si los productos son competitivos, complementarios, o de ninguno de los dos tipos. Justifique su respuesta.

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

① a) $f(x,y) = y e^{x/y}$

$$f_x = \cancel{y} e^{x/y} \cdot \frac{1}{\cancel{y}} = e^{x/y}$$

$$f_{xy} = e^{x/y} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right)$$

$$= \frac{-x}{y^2} e^{x/y}$$

$$f_y = e^{x/y} + y e^{x/y} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right)$$

$$= e^{x/y} - \frac{x}{y} e^{x/y}$$

$$f_{yy} = e^{x/y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) - \left[\frac{-x}{y^2} e^{x/y} + \frac{x}{y} e^{x/y} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right)\right]$$

$$= \cancel{-\frac{x}{y^2} e^{x/y}} + \cancel{\frac{x}{y^2} e^{x/y}} + \frac{x^2}{y^3} e^{x/y}$$

Entonces

$$x f_{xy} + y f_{yy} = \frac{-x^2}{y^2} e^{x/y} + \frac{x^2}{y^2} e^{x/y} = 0.$$

b) $s e^{r^2+u^2} = u \ln(t^2+1)$; $\frac{\partial t}{\partial u} = ?$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(s e^{r^2+u^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left[u \ln(t^2+1)\right]$$

$$s e^{r^2+u^2} \cdot 2u = \ln(t^2+1) + u \cdot \frac{1}{t^2+1} \cdot 2t \cdot \frac{\partial t}{\partial u}$$

$$2su e^{r^2+u^2} = \ln(t^2+1) + \frac{2tu}{t^2+1} \cdot \frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{2su e^{r^2+u^2} - \ln(t^2+1)}{\frac{2tu}{t^2+1}}$$

② $P = \dfrac{kl}{2k+2l}$

a)

$$\frac{\partial P}{\partial k} = \frac{l(2k+2l) - kl \cdot 2}{(2k+2l)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2kl} + 2l^2 - \cancel{2kl}}{(2k+2l)^2} = \frac{2l^2}{(2k+2l)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{k(2k+2l) - kl \cdot 2}{(2k+2l)^2}$$

$$= \frac{2k^2 + \cancel{2kl} - \cancel{2kl}}{(2k+2l)^2} = \frac{2k^2}{(2k+2l)^2}$$

b) Supongamos que $k = l = a$, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial l} + \frac{\partial P}{\partial k} = \frac{2a^2}{16a^2} + \frac{2a^2}{16a^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

3) $Q(k,l) = 30 k^{3/10} l^{7/10}$

$$\frac{\partial Q}{\partial k} = 9 k^{-7/10} l^{7/10}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = 21 k^{3/10} l^{-3/10}$$

a) $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial k}\right|_{(630,830)} = 10,91$

$\left.\dfrac{\partial Q}{\partial l}\right|_{(630,830)} = 19,33$

b) Si el fabricante aumenta el capital en una unidad, la producción aumenta 10,91 y si aumenta 1 hora la producción aumenta 19,83. Por tanto, el fabricante debe aumentar de 830 a 831 horas-trabajador.

4) $q_A = \dfrac{100\sqrt{P_B}}{P_A^2} \wedge q_B = \dfrac{500\sqrt[3]{P_A}}{\sqrt{P_B^3}}$

$= 100\, P_B^{1/2} P_A^{-2} \qquad = 500\, P_A^{1/3} P_B^{-3/2}$

a)
$\dfrac{\partial q_A}{\partial P_A} = -200\, P_B^{1/2} P_A^{-3} \qquad \dfrac{\partial q_B}{\partial P_A} = \dfrac{500}{3} P_A^{-2/3} P_B^{-3/2}$

$\dfrac{\partial q_A}{\partial P_B} = 50\, P_B^{-1/2} P_A^{-2} \qquad \dfrac{\partial q_B}{\partial P_B} = -750\, P_A^{1/3} P_B^{-5/2}$

b) Dado que

$\dfrac{\partial q_A}{\partial P_B} > 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial q_B}{\partial P_A} > 0$

los productos son competitivos.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 201610
Fila A .
February 20, 2016

Nombre completo: Solucionario

1. (a) Si $f(x,y) = xe^{y/x}$, pruebe que $xf_{xx} + yf_{xy} = 0$.

   (b) Si $re^{s^2-u^2} = u\ln(t^2+2)$, calcule $\dfrac{\partial t}{\partial u}$.

---

2. Suponga que una función de producción está dada por $p = \dfrac{k\ell}{2k+3\ell}$.

   (a) Determine las funciones de productividad marginal.

   (b) Demuestre que cuando $k = \ell$, la suma de las productividades marginales es $\dfrac{1}{5}$.

---

3. Un fabricante estima que la producción anual de su fábrica está dada por

$$Q(k,\ell) = 50k^{2/5}\ell^{3/5} \quad \text{unidades,}$$

donde k es el capital en unidades de mil y ℓ es la fuerza laboral medida en horas-trabajador.

   (a) Encuentre la productividad marginal del capital y la productividad marginal del trabajo, cuando el capital es \$ 750.000 y el nivel de la fuerza laboral es 991 horas-trabajador.

   (b) ¿Debe el fabricante considerar invertir en capital o aumentar el nivel de fuerza laboral para aumentar la producción tan rápidamente como sea posible? Justifique claramente su respuesta.

---

4. Las ecuaciones de demanda para los productos A y B están dadas por

$$q_A = \frac{50\sqrt{p_A}}{\sqrt[3]{p_B}} \quad \text{y} \quad q_B = \frac{75\sqrt[3]{p_B^2}}{p_A},$$

respectivamente, donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y B, y p_A y p_B son los precios correspondientes por unidad.

   (a) Encuentre las cuatro funciones de demanda marginal e interprtelas.

   (b) Determine si los productos son competitivos, complementarios, o de ninguno de los dos tipos. Justifique su respuesta.

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

① a) $f(x,y) = xe^{y/x}$

$$f_x = e^{y/x} + x \cdot e^{y/x} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$= e^{y/x} - \frac{y}{x} e^{y/x}$$

$$f_{xx} = e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) - \left[-\frac{y}{x^2} e^{y/x} + \frac{y}{x} e^{y/x}\left(\frac{-y}{x^2}\right)\right]$$

$$= \cancel{\frac{-y}{x^2} e^{y/x}} + \cancel{\frac{y}{x^2} e^{y/x}} + \frac{y^2}{x^3} e^{y/x}$$

$$f_{xy} = e^{y/x} \cdot \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} e^{y/x} + \frac{y}{x} e^{y/x} \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{x} e^{y/x}} - \cancel{\frac{1}{x} e^{y/x}} - \frac{y}{x^2} e^{y/x}$$

Entonces

$$x f_{xx} + y f_{xy}$$

$$= \frac{y^2}{x^2} e^{y/x} - \frac{y^2}{x^2} e^{y/x} = 0.$$

b) $re^{s^2-u^2} = u \ln(t^2+2)$; $\frac{\partial t}{\partial u} = ?$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(re^{s^2-u^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left[u \ln(t^2+2)\right]$$

$$re^{s^2-u^2} \cdot (-2u) = \ln(t^2+2) + u \cdot \frac{1}{t^2+2} \cdot 2t \frac{\partial t}{\partial u}$$

$$-2rue^{s^2-u^2} = \ln(t^2+2) + \frac{2ut}{t^2+2} \cdot \frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{-2rue^{s^2-u^2} - \ln(t^2+2)}{\frac{2ut}{t^2+2}}$$

$$P = \frac{kl}{2k+3l}$$

a)
$$\frac{\partial P}{\partial k} = \frac{l(2k+3l) - kl \cdot 2}{(2k+3l)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2kl} + 3l^2 - \cancel{2kl}}{(2k+3l)^2} = \frac{3l^2}{(2k+3l)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{k(2k+3l) - kl \cdot 3}{(2k+3l)^2}$$

$$= \frac{2k^2 + \cancel{3kl} - \cancel{3kl}}{(2k+3l)^2} = \frac{2k^2}{(2k+3l)^2}$$

b) Supongamos que $k = l = a$, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{3a^2}{25a^2} = \frac{3}{25} \wedge \frac{\partial P}{\partial a} = \frac{2a^2}{25a^2} = \frac{2}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial a} = \frac{3}{25} + \frac{2}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

3) $Q(k,l) = 50k^{2/5} l^{3/5}$

$$\frac{\partial Q}{\partial k} = 20 k^{-3/5} l^{3/5}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = 30 k^{2/5} l^{-2/5}$$

a)
$$\left.\frac{\partial Q}{\partial k}\right|_{(750, 991)} = 23,64$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial l}\right|_{(750, 991)} = 26,84$$

b) Si el fabricante aumenta el capital en una unidad, la producción aumenta 23,64 y, si aumenta 1 hora la producción aumenta 26,84. Por tanto, el fabricante debe aumentar de 991 a 992 horas-trabajador para tener un mejor aumento de la producción.

(4) $q_A = \dfrac{50\sqrt{P_A}}{\sqrt[3]{P_B}}$ $\qquad$ $q_B = \dfrac{75\sqrt[3]{P_B^2}}{P_A}$

(a) $= 50\, P_A^{1/2}\, P_B^{-1/3}$ $\qquad$ $= 75\, P_B^{2/3}\, P_A^{-1}$

$\dfrac{\partial q_A}{\partial P_A} = 25\, P_A^{-1/2}\, P_B^{-1/3}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial q_B}{\partial P_A} = -75\, P_B^{2/3}\, P_A^{-2}$

$\dfrac{\partial q_A}{\partial P_B} = -\dfrac{50}{3}\, P_A^{1/2}\, P_B^{-4/3}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial q_B}{\partial P_B} = 50\, P_B^{-1/3}\, P_A^{-1}$

(b) Dado que

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} < 0 \ \wedge \ \frac{\partial q_B}{\partial P_A} < 0$$

entonces los productos son complementarios.