UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 201630
Fila B
August 20, 2016

Nombre completo: Solucionario Código:

1. (a) Si $z = ye^{-3xy}$, pruebe que $y\dfrac{\partial z}{\partial y} - x\dfrac{\partial z}{\partial x} = z$.

   (b) Si $z = \ln\left[\dfrac{(r+s)^2}{r^2+s^2}\right]$, calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial r}$ cuando $r = 1$ y $s = 1$.

---

2. Si $3z^3 = 2y^3 + 4x^3y^2 + 6y^2z$, calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

---

3. Un fabricante estima que el costo total de producción de sus productos A y B está dado por

$$C = \frac{2q_B^2(q_A^3 + q_B)^{1/2}}{5} + q_A^{1/3}q_B + 5.000,$$

donde q_A y q_B son las unidades producidas del producto A y B, respectivamente.

   (a) Encuentre las funciones de costo marginal cuando se producen 8 unidades del producto A y 17 unidades del producto B.

   (b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, ¿debe el fabricante considerar producir una unidad adicional del producto A o del producto B? Justifique claramente su respuesta.

---

4. Las ecuaciones de demanda para los productos A y B están dadas por

$$q_A = \frac{p_A^2}{4 - p_B^3} \quad \text{y} \quad q_B = \frac{3p_B^2}{2 - p_A^3},$$

respectivamente, donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y B, y p_A y p_B son los precios correspondientes por unidad.

   (a) Encuentre las cuatro funciones de demanda marginal e interprtelas.

   (b) Determine si los productos son competitivos, complementarios, o de ninguno de los dos tipos. Justifique su respuesta.

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

1) a) Si $z = y e^{-3xy}$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y e^{-3xy}(-3y)$$
$$= -3y^2 e^{-3xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-3xy} + y \cdot e^{-3xy} \cdot (-3x)$$
$$= e^{-3xy} - 3xye^{-3xy}$$

$$\Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$= ye^{-3xy} \cancel{- 3xy^2 e^{-3xy}} \cancel{+ 3xy^2 e^{-3xy}}$$
$$= z$$

b) $z = 2\ln(r+s) - \ln(r^2+s^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2 \cdot \frac{1}{r+s} \cdot 1 - \frac{1}{r^2+s^2} \cdot 2r$$
$$= \frac{2}{r+s} - \frac{2r}{r^2+s^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial r} = \frac{-2}{(r+s)^2} \cdot 1 + \frac{2r}{(r^2+s^2)^2} \cdot 2s$$
$$= \frac{-2}{(r+s)^2} + \frac{4rs}{(r^2+s^2)^2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial r}\right|_{\substack{r=1\\ s=1}} = \frac{-2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{1}{2}$$

2) $3z^3 = 2y^3 + 4x^3y^2 + 6y^2 z$

Derivamos implícitamente, $z = z(x,y)$

$$9z^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2y^2 + 6y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(9z^2 \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(12x^2y^2 + 6y^2 \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$18z \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + 9z^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 24xy^2 + 6y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{24xy^2 - 18z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{9z^2 - 6y^2}$$

3) $C = \dfrac{2q_B^2 (q_A^3 + q_B)^{1/2}}{5} + q_A^{1/3} q_B + 5000$

a)
$$\frac{\partial C}{\partial q_A} = \frac{2q_B^2}{5} \cdot \frac{1}{2}(q_A^3 + q_B)^{-1/2} \cdot 3q_A^2 + \frac{1}{3} q_A^{-2/3} q_B$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C}{\partial q_A}\right|_{\substack{q_A = 8\\ q_B = 17}} \approx 483{,}921$$

$$\frac{\partial C}{\partial q_B} = \frac{2}{5}\left[2q_B(q_A^3+q_B)^{1/2} + q_B^2 \cdot \frac{1}{2}(q_A^3+q_B)^{-1/2} \cdot 1\right] + q_A^{1/3}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C}{\partial q_B}\right|_{\substack{q_A = 8\\ q_B = 17}} \approx 317{,}31$$

b) El fabricante debe considerar producir una unidad más del producto B.

4) $q_A = \dfrac{P_A^2}{4 - P_B^3} \wedge q_B = \dfrac{3P_B^2}{2 - P_A^3}$

a) $\dfrac{\partial q_A}{\partial P_A} = \dfrac{2P_A}{4 - P_B^3}$ $\qquad \dfrac{\partial q_A}{\partial P_B} = \dfrac{-P_A^2}{(4-P_B^3)^2} \cdot (-3P_B^2)$

$\dfrac{\partial q_B}{\partial P_A} = \dfrac{-3P_B^2}{(2-P_A^3)^2} \cdot (-3P_A^2)$ $\qquad \dfrac{\partial q_B}{\partial P_B} = \dfrac{6P_B}{2 - P_A^3}$

b) $\dfrac{\partial q_A}{\partial P_B} > 0 \wedge \dfrac{\partial q_B}{\partial P_A} > 0$

Los productos A y B son competitivos.

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 201630
Fila A
August 20, 2016

Nombre completo: Solucionario. Código:

1. (a) Si $z = xe^{-2xy}$, pruebe que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

   (b) Si $z = \ln\left[\dfrac{r^2+s^2}{(r+s)^2}\right]$, calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial s}$ cuando $r = 1$ y $s = 1$.

---

2. Si $3z^3 = 2x^3 + 4x^2y^3 + 5x^2z$, calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

---

3. Un fabricante estima que el costo total de producción de sus productos A y B está dado por

$$C = \frac{2q_A^2(q_B^3 + q_A)^{1/2}}{5} + q_A q_B^{1/3} + 5.000,$$

donde q_A y q_B son las unidades producidas del producto A y B, respectivamente.

   (a) Encuentre las funciones de costo marginal cuando se producen 17 unidades del producto A y 8 unidades del producto B.

   (b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, ¿debe el fabricante considerar producir una unidad adicional del producto A o del producto B? Justifique claramente su respuesta.

---

4. Las ecuaciones de demanda para los productos A y B están dadas por

$$q_A = \frac{p_A^3}{1+p_B^2} \quad \text{y} \quad q_B = \frac{7p_B^2}{1+p_A^3},$$

respectivamente, donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y B, y p_A y p_B son los precios correspondientes por unidad.

   (a) Encuentre las cuatro funciones de demanda marginal e interprtelas.

   (b) Determine si los productos son competitivos, complementarios, o de ninguno de los dos tipos. Justifique su respuesta.

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

1) a) Si $z = xe^{-2xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-2xy} + xe^{-2xy}\cdot(-2y)$$

$$= e^{-2xy} - 2xye^{-2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{-2xy}\cdot(-2x)$$

$$= -2x^2e^{-2xy}$$

Entonces,

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= xe^{-2xy} \cancel{-2x^2ye^{-2xy}} \cancel{+2x^2ye^{-2xy}}$$

$$= z \quad \blacksquare$$

b) $z = \ln\frac{r^2+s^2}{(r+s)^2}$

$$= \ln(r^2+s^2) - 2\ln(r+s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{r^2+s^2}\cdot 2s - 2\cdot\frac{1}{r+s}\cdot 1$$

$$= \frac{2s}{r^2+s^2} - \frac{2}{r+s}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial s} = \frac{-2s}{(r^2+s^2)^2}\cdot 2r + \frac{2}{(r+s)^2}\cdot 1$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial s}\right|_{\substack{r=1\\ s=1}} = \frac{-4}{4} + \frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

2) $3z^3 = 2x^3 + 4x^2y^3 + 5x^2z$

Derivamos implícitamente, $z = z(x,y)$

$$9z^2\frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 5x^2\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(9z^2\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(12x^2y^2 + 5x^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$18z\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + 9z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2y + 5x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{24x^2y - 18z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{9z^2-5x^2}$$

3) $C = \frac{2q_A^2(q_B^3+q_A)^{1/2}}{5} + q_Aq_B^{1/3} + 5000$

a) $\frac{\partial C}{\partial q_A} = \frac{2}{5}\left[2q_A(q_B^3+q_A)^{1/2} + q_A^2\cdot\frac{1}{2}(q_B^3+q_A)^{-1/2}\cdot 1\right] + q_B^{1/3}$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C}{\partial q_A}\right|_{\substack{q_A=17\\ q_B=8}} \approx 317{,}313$$

$$\frac{\partial C}{\partial q_B} = \frac{2q_A^2}{5}\cdot\frac{1}{2}(q_B^3+q_A)^{-1/2}\cdot 3q_B^2 + \frac{1}{3}q_Aq_B^{-2/3}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial C}{\partial q_B}\right|_{\substack{q_A=17\\ q_B=8}} \approx 483{,}921$$

b) El fabricante debe considerar producir una unidad más del producto A.

4) $q_A = \frac{P_A^3}{1+P_B^2} \wedge q_B = \frac{7P_B^2}{1+P_A^3}$

a) $\frac{\partial q_A}{\partial P_A} = \frac{3P_A^2}{1+P_B^2}$ $\quad \frac{\partial q_A}{\partial P_B} = \frac{-P_A^3}{(1+P_B^2)^2}\cdot 2P_B$

$\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = \frac{-7P_B^2}{(1+P_A^3)^2}\cdot 3P_A^2$ $\quad \frac{\partial q_B}{\partial P_B} = \frac{14P_B}{1+P_A^3}$

b) $\frac{\partial q_A}{\partial P_B} < 0 \wedge \frac{\partial q_B}{\partial P_A} < 0$

Los productos A y B son complementarios.