UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 201710
Fila B
February 18, 2017

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. Conteste falso (F) o verdadero (V) según el caso. Justifique claramente su respuesta.

   (a) Si $f(x,y) = 2x^2y^3 + 6x^3y^2$, entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. .... (V)

   (b) Si $q_A = \dfrac{200\sqrt[3]{p_B}}{p_A}$ y $q_B = \dfrac{500}{p_B\sqrt{p_A}}$ son funciones de demanda para dos productos A y B, respectivamente, entonces dichos productos son competitivos .... (F)

   (c) Si $\ln(z) = 4x + y$, entonces $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. .... (F)

   (d) Si $C = f(q_A, q_B)$ representa una función de costos conjuntos, con q_A y q_B unidades producidas de los productos A y B, respectivamente, y $\dfrac{\partial C}{\partial q_A} < 0$ y $\dfrac{\partial C}{\partial q_B} > 0$, entonces el productor debe considerar aumentar la producción del producto B. .... (F)

---

2. Si $f(x,y) = y\ln\left(\dfrac{x^2}{y}\right) + 3y - 2x^2y$ calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

---

3. Si $f(x,y) = xye^{x/y}$, pruebe que $xf_x + yf_y = 2f$.

---

4. En cierta fábrica la producción diaria es $P(k,l) = 120k^{1/3}l^{1/2}$ unidades, donde k denota la inversión de capital medida en unidades de mil, y l es la fuerza laboral medida en horas-trabajador.

   (a) Halle las funciones de productividad marginal.

   (b) Si actualmente se invierten 900.000 pesos de capital y todos los días se emplea una fuerza laboral de 1000 horas-trabajador, determine la variación en la producción cuando se adicionan 1000 pesos de capital y se mantiene fija la fuerza laboral.

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

①

a) $f(x,y) = 2x^2y^3 + 6x^3y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3 + 18x^2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y^2 + 12x^3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = 12xy^2 + 36x^2y = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}$$

b) $$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} = \frac{200\, P_B^{-2/3}}{3P_A} > 0$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = \frac{-250}{P_B\, P_A^{3/2}} < 0$$

c) $\ln z = 4x + y$

$\Rightarrow z = e^{4x+y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{4x+y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{4x+y} \neq 0$$

d) $\frac{\partial c}{\partial q_A} < 0$ aumento en la demanda de A ocasiona disminución en los costos.

$\frac{\partial c}{\partial q_B} > 0$ aumento en la demanda de B ocasiona incremento en los costos.

② $f(x,y) = y\ln\left(\frac{x^2}{y}\right) + 3y - 2x^2y$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln\left(\frac{x^2}{y}\right) + y \cdot \frac{1}{x^2/y} \cdot \frac{-x^2}{y^2} + 3 - 2x^2$$

$$= \ln\left(\frac{x^2}{y}\right) + 2 - 2x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x^2/y} \cdot \frac{2x}{y} - 4x = \frac{2}{x} - 4x$$

③ $f(x,y) = xy\, e^{x/y}$

$$f_x = y e^{x/y} + xy e^{x/y} \cdot \frac{1}{y} = y e^{x/y} + x e^{x/y}$$

$$f_y = x e^{x/y} + xy\, e^{x/y} \cdot \frac{-x}{y^2} = x e^{x/y} - \frac{x^2}{y} e^{x/y}$$

$$\Rightarrow x f_x + y f_y = xy e^{x/y} \cancel{+ x^2 e^{x/y}} + xy e^{x/y} \cancel{- x^2 e^{x/y}}$$

$$= 2xy\, e^{x/y} = 2 f(x,y)$$

④ $P(K, \ell) = 120\, K^{1/3} \ell^{1/2}$

a) $$\frac{\partial P}{\partial K} = 40\, K^{-2/3} \ell^{1/2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \ell} = 60\, K^{1/3} \ell^{-1/2}$$

b) $K = 900$ y $\ell = 1000$

$$\frac{\partial P}{\partial K}(900, 1000) = 40(900)^{-2/3}(1000)^{1/2} \approx 13{,}57$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 201710
Fila A
February 18, 2017

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. Conteste falso (F) o verdadero (V) según el caso. Justifique claramente su respuesta.

   (a) Si $f(x,y) = 2x^3y^2 + 6x^2y^3$, entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. .... (V)

   (b) Si $q_A = \dfrac{100}{p_A\sqrt{p_B}}$ y $q_B = \dfrac{500\sqrt[3]{p_A}}{p_B}$ son funciones de demanda para dos productos A y B, respectivamente, entonces dichos productos son competitivos .... (F)

   (c) Si $\ln(z) = 4x + y$, entonces $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$. .... (F)

   (d) Si $C = f(q_A, q_B)$ representa una función de costos conjuntos, con q_A y q_B unidades producidas de los productos A y B, respectivamente, y $\dfrac{\partial C}{\partial q_A} > 0$ y $\dfrac{\partial C}{\partial q_B} < 0$, entonces el productor debe considerar aumentar la producción del producto A. .... (F)

---

2. Si $f(x,y) = x\ln\left(\dfrac{y^2}{x}\right) + 3x - 2xy^2$ calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

---

3. Si $f(x,y) = xye^{xy}$, pruebe que $xf_x - yf_y = 0$.

---

4. En cierta fábrica la producción diaria es $P(k,l) = 60k^{1/2}l^{1/3}$ unidades, donde k denota la inversión de capital medida en unidades de mil, y l es la fuerza laboral medida en horas-trabajador.

   (a) Halle las funciones de productividad marginal.

   (b) Si actualmente se invierten 900.000 pesos de capital y todos los días se emplea una fuerza laboral de 1000 horas-trabajador, determine la variación en la producción cuando se adicionan 1000 pesos de capital y se mantiene fija la fuerza laboral.

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

1

a) $f(x,y) = 2x^3y^2 + 6x^2y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y^2 + 12xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3y + 18x^2y^2$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 12x^2y + 36xy^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

b) $\dfrac{\partial q_A}{\partial p_B} = \dfrac{-50}{p_A\, p_B^{3/2}} > 0$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = \frac{500\, p_A^{-2/3}}{3p_B} > 0$$

los productos A y B son competitivos.

c) $\ln z = 4x + y$

$\rightarrow z = e^{4x+y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4e^{4x+y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 16e^{4x+y}$$

$\rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \neq 0$

d) $\dfrac{\partial c}{\partial q_A} > 0$: aumento en la demanda de A ocasiona incremento en los costos.

$\dfrac{\partial c}{\partial q_B} < 0$: aumento en la demanda de B ocasiona disminución en los costos.

2 Si $f(x,y) = x\ln\left(\frac{y^2}{x}\right) + 3x - 2xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln\left(\frac{y^2}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{y^2/x}\cdot\frac{-y^2}{x^2} + 3 - 2y^2$$

$$= \ln\left(\frac{y^2}{x}\right) + 2 - 2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{y^2/x}\cdot\frac{2y}{x} - 4y = \frac{2}{y} - 4y$$

3 $f(x,y) = xy\,e^{xy}$

$$f_x = ye^{xy} + xye^{xy}\cdot y = ye^{xy} + xy^2e^{xy}$$

$$f_y = xe^{xy} + xye^{xy}\cdot x = xe^{xy} + x^2ye^{xy}$$

Entonces,

$$xf_x - yf_y = \cancel{xye^{xy}} + \cancel{x^2y^2e^{xy}} - \cancel{xye^{xy}} - \cancel{x^2y^2e^{xy}} = 0$$

4 $P(k,l) = 60k^{1/2}l^{1/3}$

a) $\dfrac{\partial P}{\partial k} = 30k^{-1/2}l^{1/3}$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = 20k^{1/2}l^{-2/3}$$

b) $k = 900$ y $l = 1000$

$$\frac{\partial P}{\partial k}(900, 1000) = 30(900)^{-1/2}(1000)^{1/3} = 10.$$