UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 201810
Fila B
Febrero 24 de 2018

Nombre completo:________________________Código:________________________

1. **[15 pts]** Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por

$$q_A = 10\sqrt{\frac{p_B}{p_A}} \qquad \text{y} \qquad q_B = \sqrt[3]{\frac{p_A}{p_B}}$$

donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y de B, p_A y p_B son los precios correspondientes (en dólares) por unidad.
a) [10 pts] Encuentre los valores de las dos demandas marginales para el producto A cuando $p_A = 9$ y $p_B = 16$.
b) [5 pts] Si p_A se aumenta de 9 a 10, con p_B fijo en 16, use el inciso *a*) para estimar el cambio correspondiente en la demanda para el producto A.

---

2. **[15 pts]** La utilidad diaria de un comerciante por la venta de cierto producto de dos marcas es

$$U(x, y) = (y - 30)(70 + 4x - 5y) + (x - 40)(80 - 7x + 6y)$$

dólares, donde x es el precio por el producto de la primera marca y y es el precio por el producto de la segunda marca. Actualmente, la primera marca se vende en 5200 centavos por unidad y la segunda en 5000 centavos por unidad. ¿El comerciante debe considerar aumentar el precio de la primera marca o aumentar el precio de la segunda marca para aumentar la utilidad?

---

3. **[10 pts]** Usando el método de diferenciación implícita determine la derivada parcial indicada para los valores dados de las variables.

$$\frac{2r^3s^2}{s^2 + t^2} = r; \ \frac{\partial r}{\partial t}, \ r = 1, \ s = 1, \ t = 1.$$

---

4. **[10 pts]** Para $z = 2\ln(x^2 - y^2)$, verifique que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0.$$

Tiempo máximo: 80 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario Parcial I
Cálculo III (AVEC) 201810
fila B

① $q_A = 10 P_A^{-1/2} P_B^{1/2}$

a) $\dfrac{\partial q_A}{\partial P_A} = -5 P_A^{-3/2} P_B^{1/2} \wedge \dfrac{\partial q_A}{\partial P_B} = 5 P_A^{-1/2} P_B^{-1/2}$

entonces

$\left.\dfrac{\partial q_A}{\partial P_A}\right|_{(9,16)} \approx -0{,}74 \wedge \left.\dfrac{\partial q_A}{\partial P_B}\right|_{(9,16)} \approx 0{,}42$

b) Si el precio de A se aumenta de 9 a 10 y se mantiene el precio de B en 16, entonces la demanda de A disminuye aproximadamente en 0,74.

② $U(x,y) = 70y + 4xy - 5y^2 - 2100 - 120x + 150y + 80x - 7x^2 + 6xy - 3200 + 280x - 240y$
$= -7x^2 - 5y^2 + 10xy + 240x - 20y - 5300$

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = -14x + 10y + 240 \wedge \dfrac{\partial U}{\partial y} = -10y + 10x - 20$

$\dfrac{\partial U}{\partial x}(52,50) = 12 \wedge \dfrac{\partial U}{\partial y}(52,50) = 0$

El comerciante debe considerar aumentar el precio de la primera marca para obtener una mayor utilidad ya que

$\dfrac{\partial U}{\partial x}(52,50) > \dfrac{\partial U}{\partial y}(52,50)$

③ Aquí r es una función que depende de s y t.

$\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{2r^3s^2}{s^2+t^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}(r)$

$\dfrac{6r^2s^2\dfrac{\partial r}{\partial t}(s^2+t^2) - 2r^3s^2\cdot 2t}{(s^2+t^2)^2} = \dfrac{\partial r}{\partial t}$

Cuando $r=s=t=1$, tenemos

$\dfrac{6\dfrac{\partial r}{\partial t}\cdot 2 - 4}{4} = \dfrac{\partial r}{\partial t}$

$12\dfrac{\partial r}{\partial t} - 4 = 4\dfrac{\partial r}{\partial t}$

$8\dfrac{\partial r}{\partial t} = 4$

$\dfrac{\partial r}{\partial t} = \dfrac{1}{2}$

④ $z = 2\ln(x^2-y^2)$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2\cdot\dfrac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x = 4x(x^2-y^2)^{-1}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -4x(x^2-y^2)^{-2}\cdot(-2y) = \dfrac{8xy}{(x^2-y^2)^2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2\cdot\dfrac{1}{x^2-y^2}\cdot(-2y) = -4y(x^2-y^2)^{-1}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 4y(x^2-y^2)^{-2}\cdot 2x = \dfrac{8xy}{(x^2-y^2)^2}$

$\Longrightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 0.$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 201810
Fila A
Febrero 24 de 2018

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

1. **[15 pts]** Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por

$$q_A = 10\sqrt{\frac{p_B}{p_A}} \qquad \text{y} \qquad q_B = \sqrt[3]{\frac{p_A}{p_B}}$$

donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y de B, p_A y p_B son los precios correspondientes (en dólares) por unidad.
a) [10 pts] Encuentre los valores de las dos demandas marginales para el producto B cuando $p_A = 9$ y $p_B = 16$.
b) [5 pts] Si p_A se reduce de 9 a 8, con p_B fijo en 16, use el inciso *a*) para estimar el cambio correspondiente en la demanda para el producto B.

---

2. **[15 pts]** La utilidad diaria de un comerciante por la venta de cierto producto de dos marcas es

$$U(x, y) = (x - 30)(70 - 5x + 4y) + (y - 40)(80 + 6x - 7y)$$

dólares, donde x es el precio por el producto de la primera marca y y es el precio por el producto de la segunda marca. Actualmente, la primera marca se vende en 5000 centavos por unidad y la segunda en 5200 centavos por unidad. ¿El comerciante debe considerar aumentar el precio de la primera marca o aumentar el precio de la segunda marca para aumentar la utilidad?

---

3. **[10 pts]** Usando el método de diferenciación implícita determine la derivada parcial indicada para los valores dados de las variables.

$$\frac{2r^2s^3}{s^2+t^2} = t; \ \frac{\partial s}{\partial t}, \ r = 1, \ s = 1, \ t = 1.$$

---

4. **[10 pts]** Para $z = -2\ln(x^2 + y^2)$, verifique que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0.$$

Tiempo máximo: 80 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario Parcial I
Cálculo III (ANEC) 201810
fila A

① $q_B = P_A^{1/3} P_B^{-1/3}$

a) $\dfrac{\partial q_B}{\partial P_A} = \dfrac{1}{3} P_A^{-2/3} P_B^{-1/3} \wedge \dfrac{\partial q_B}{\partial P_B} = -\dfrac{1}{3} P_A^{1/3} P_B^{-4/3}$

entonces

$\left.\dfrac{\partial q_B}{\partial P_A}\right|_{(9,16)} \approx 0,03 \wedge \dfrac{\partial q_B}{\partial P_B} \approx -0,17$

b) Si el precio de A se reduce de 9 a 8 y se mantiene fijo el precio de B en 16, entonces la demanda de B disminuye aproximadamente en 0,03.

② $U(x,y) = 70x - 5x^2 + 4xy - 2100 + 150x - 120y$
$+ 80y + 6xy - 7y^2 - 3200 - 240x + 280y$
$= -5x^2 - 7y^2 + 10xy - 20x + 240y - 5300$

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = -10x + 10y - 20 \wedge \dfrac{\partial U}{\partial y} = -14y + 10x + 240$

$\dfrac{\partial U}{\partial x}(50,52) = 0 \wedge \dfrac{\partial U}{\partial y}(50,52) = 12$

El comerciante debe considerar aumentar el precio de la segunda marca para obtener una mayor utilidad. ya que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(50,52) < \frac{\partial U}{\partial y}(50,52).$$

③ Aquí s es una función que depende de r y t.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2r^2s^3}{s^2+t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(t)$$

$$\frac{6r^2s^2\frac{\partial s}{\partial t}(s^2+t^2) - 2r^2s^3\cdot\left(2s\frac{\partial s}{\partial t} + 2t\right)}{(s^2+t^2)^2} = 1$$

cuando $r = s = t = 1$, tenemos

$$\frac{6\cdot\frac{\partial s}{\partial t}\cdot 2 - 2\left(2\frac{\partial s}{\partial t} + 2\right)}{4} = 1$$

$$12\frac{\partial s}{\partial t} - 4\frac{\partial s}{\partial t} - 4 = 4$$

$$8\frac{\partial s}{\partial t} = 8$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 1$$

④ $z = -2\ln(x^2+y^2)$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -2\cdot\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x = -4x(x^2+y^2)^{-1}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 4x(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y = \dfrac{8xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2\cdot\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y = -4y(x^2+y^2)^{-1}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 4y(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x = \dfrac{8xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 0$