Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. **[15 pts]** Las funciones de demanda para los productos A y B son cada una función de los precios de A y B y están dadas por
$$q_A = \frac{50p_B}{\sqrt[3]{p_A}} \qquad \text{y} \qquad q_B = \frac{30\sqrt{p_A}}{\sqrt[3]{p_B^2}}$$
respectivamente. Encuentre las cuatro funciones de demanda marginal y determine si A y B son productos competitivos, productos complementarios o ninguno de los dos.

---

2. **[15 pts]** Un fabricante de un juguete popular ha determinado que su función de producción es $P = \sqrt{lk}$, donde l es el número de horas trabajador por semana y k es el capital (expresado en cientos de dólares por semana) requerido para la producción semanal de P gruesas del juguete (una gruesa se compone de 144 unidades). Determine las funciones de productividad marginal y evalúelas cuando $l = 900$ y $k = 25$. Interprete los resultados.

---

3. **[10 pts]** Usando el método de diferenciación implícita determine la derivada parcial indicada para los valores dados de las variables.
$$\frac{s}{s+t} + \frac{t}{2} = \frac{r}{3};\ \frac{\partial r}{\partial t},\ r = 5,\ s = 4,\ t = 2.$$

---

4. **[10 pts]** Verifique que la función
$$u = -x^2 + 2y + \frac{1}{2}e^{-4y} - \frac{1}{2}$$
satisface la ecuación
$$-u_{xx} + x^2 u_{yy} + \frac{1+4x^2}{x}u_x + 4x^2 u_y = 0.$$

Tiempo máximo: 70 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario Parcial I
Cálculo III (ANEC) 201830
fila B

① $q_A = 50 P_A^{-1/3} P_B \wedge q_B = 30 P_A^{1/2} P_B^{-2/3}$

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_A} = -\frac{50}{3} P_A^{-4/3} P_B$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} = 50 P_A^{-1/3}$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = 15 P_A^{-1/2} P_B^{-2/3}$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial P_B} = -20 P_A^{1/2} P_B^{-5/3}$$

Dado que $\frac{\partial q_A}{\partial P_B} > 0$ y $\frac{\partial q_B}{\partial P_A} > 0$, entonces A y B son competitivos.

② $P(l, k) = \sqrt{lk}$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{1}{2\sqrt{lk}} \cdot k = \frac{1}{2} l^{-1/2} k^{1/2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial k} = \frac{1}{2\sqrt{lk}} \cdot l = \frac{1}{2} l^{1/2} k^{-1/2}$$

Cuando $l = 900$ y $k = 25$, tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial l}(900, 25) = \frac{1}{12} \wedge \frac{\partial P}{\partial k}(900, 25) = 3$$

Luego:
Si se incrementa l de 900 a 901 manteniendo k fijo en 25 tendremos que la producción aumentará aprox. en 1/12 gruesas. Pero si se incrementa k de 25 a 26 manteniendo l fijo en 900 tendremos que la producción aumentará aprox. en 3 gruesas.

③ $\frac{r}{3} = s(s+t)^{-1} + \frac{t}{2}$; r depende de t y s

$$\rightarrow \frac{1}{3}\frac{\partial r}{\partial t} = -s(s+t)^{-2} \cdot 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{-3s}{(s+t)^2} + \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \left.\frac{\partial r}{\partial t}\right|_{\substack{r=5\\ s=4\\ t=2}} = \frac{-3 \cdot 4}{(4+2)^2} + \frac{3}{2} = \frac{7}{6}$$

④ $u = -x^2 + 2y + \frac{1}{2}e^{-4y} - \frac{1}{2}$

$u_x = -2x \qquad u_y = 2 - 2e^{-4y}$

$u_{xx} = -2 \qquad u_{yy} = 8e^{-4y}$

Entonces,

$$-u_{xx} + x^2 u_{yy} + \frac{1+4x^2}{x} u_x + 4x^2 u_y$$

$$= -(-2) + x^2 \cdot 8e^{-4y} + \frac{1+4x^2}{\cancel{x}}(-2\cancel{x}) + 4x^2 \cdot (2 - 2e^{-4y})$$

$$= 2 + \cancel{8x^2 e^{-4y}} - 2 - 8x^2 + 8x^2 - \cancel{8x^2 e^{-4y}}$$

$$= 0$$

Scanned by CamScanner

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 201830
Fila A
Agosto 25 de 2018

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. **[15 pts]** Las funciones de demanda para los productos A y B son cada una función de los precios de A y B y están dadas por

$$q_A = \frac{30\sqrt{p_B}}{\sqrt[3]{p_A^2}} \qquad \text{y} \qquad q_B = \frac{50p_A}{\sqrt[3]{p_B}}$$

respectivamente. Encuentre las cuatro funciones de demanda marginal y determine si A y B son productos competitivos, productos complementarios o ninguno de los dos.

---

2. **[15 pts]** Un fabricante de un juguete popular ha determinado que su función de producción es $P = \sqrt{lk}$, donde l es el número de horas trabajador por semana y k es el capital (expresado en cientos de dólares por semana) requerido para la producción semanal de P gruesas del juguete (una gruesa se compone de 144 unidades). Determine las funciones de productividad marginal y evalúelas cuando $l = 400$ y $k = 16$. Interprete los resultados.

---

3. **[10 pts]** Usando el método de diferenciación implícita determine la derivada parcial indicada para los valores dados de las variables.

$$\frac{t}{t+s} + \frac{s}{2} = \frac{r}{3};\ \frac{\partial r}{\partial s},\ r = 5,\ s = 2,\ t = 4.$$

---

4. **[10 pts]** Verifique que la función

$$u = \frac{1}{2}e^{-4x} + 2x - y^2 - \frac{1}{2}$$

satisface la ecuación

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + 4y^2 u_x + \frac{1+4y^2}{y} u_y = 0.$$

Tiempo máximo: 70 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario Parcial I

Cálculo III (ANEC) 201830

fila A

① $q_A = 30 P_A^{-2/3} P_B^{1/2} \wedge q_B = 50 P_A P_B^{-1/3}$

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_A} = -20 P_A^{-5/3} P_B^{1/2}$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} = 15 P_A^{-2/3} P_B^{-1/2}$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = 50 P_B^{-1/3}$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial P_B} = -\frac{50}{3} P_A P_B^{-4/3}$$

Dado que $\frac{\partial q_A}{\partial P_B} > 0$ y $\frac{\partial q_B}{\partial P_A} > 0$, entonces A y B son competitivas.

② $P(l,k) = \sqrt{lk}$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{1}{2\sqrt{lk}} \cdot k = \frac{1}{2} l^{-1/2} k^{1/2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial k} = \frac{1}{2\sqrt{lk}} \cdot l = \frac{1}{2} l^{1/2} k^{-1/2}$$

Cuando $l = 400$ y $k = 16$, tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial l}(400,16) = \frac{1}{10} \wedge \frac{\partial P}{\partial k}(400,16) = \frac{5}{2}$$

Luego:

Si se incrementa l de 400 a 401, manteniendo k fijo en 16 tendremos que la producción aumentará aprox. en 0,1 gruesas. Pero si se incrementa k de 16 a 17 manteniendo l fijo en 400 tendremos que la producción aumentará aprox. en 2,5 gruesas.

③ $\frac{r}{3} = t(t+s)^{-1} + \frac{s}{2}$; r depende de t y s

$$\rightarrow \frac{1}{3}\frac{\partial r}{\partial s} = -t(t+s)^{-2} \cdot 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{-3t}{(t+s)^2} + \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \left.\frac{\partial r}{\partial s}\right|_{\substack{r=5\\ s=2\\ t=4}} = \frac{-3 \cdot 4}{(4+2)^2} + \frac{3}{2} = \frac{7}{6}$$

④ $u = \frac{1}{2}e^{-4x} - \frac{1}{2} + 2x - y^2$

$$u_x = -2e^{-4x} + 2 \qquad u_y = -2y$$

$$u_{xx} = 8e^{-4x} \qquad u_{yy} = -2$$

Entonces,

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + 4y^2 u_x + \frac{1+4y^2}{y} \cdot u_y$$

$$= y^2 \cdot 8e^{-4x} - (-2) + 4y^2 \cdot (-2e^{-4x} + 2) + \frac{1+4y^2}{\cancel{y}} \cdot (-2\cancel{y})$$

$$= \cancel{8y^2 e^{-4x}} + 2 - \cancel{8y^2 e^{-4x}} + 8y^2 - 2 - 8y^2$$

$$= 0$$