2015-2

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201530 A

Nombre completo: Solucionario

1. Halle los puntos críticos de la siguiente función:

$$f(x,y) = \frac{5}{3}x^3 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{15}{2}x^2 + y^2 - 4y + 7$$

2. Suponga que la función de utilidad

$$U(x,y) = -2x^2 - 3y^2 + ax + by + c$$

tiene un valor máximo de 30 cuando $x = 2$ y $y = 4$. Determine los valores de las constantes a, b y c.

3. Una compañía tiene un presupuesto mensual para publicidad de \$ 60.000. Se estima que si se gastan x dólares cada mes en publicidad por televisión, y y dólares cada mes en publicidad en periódicos, entonces las ventas mensuales estarán dadas por

$$S = 80x^{3/4}y^{1/4} \quad \text{dólares.}$$

Si la utilidad mensual obtenida es el 15 % de las ventas, menos el costo de publicidad, determine cómo se debe asignar el presupuesto publicitario para maximizar la utilidad mensual.

4. Sea P una función de producción dada por

$$P(l,k) = 0,54l^2 - 0,02l^3 + 1,89k^2 - 0,09k^3,$$

donde l y k son las cantidades de trabajo y capital, respectivamente, y P es la cantidad producida. Encuentre los valores de l y k que maximizan P.

Tiempo máximo: 105 minutos. Todos los puntos tienen la misma valoración.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

① $f(x,y)=\frac{5}{3}x^3+\frac{2}{3}y^3-\frac{15}{2}x^2+y^2-4y+7$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=5x^2-15x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y^2+2y-4$$

Para hallar los puntos críticos resolvamos

$$\begin{cases}5x^2-15x=0\\ 2y^2+2y-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x(x-3)=0\\ 2(y^2+y-2)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5x(x-3)=0\\ 2(y+2)(y-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0 \text{ ó } x=3\\ y=-2 \text{ ó } y=1\end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,-2)$; $(0,1)$; $(3,-2)$; $(3,1)$.

②

$$U(x,y)=-2x^2-3y^2+ax+by+c$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-4x+a \wedge \frac{\partial U}{\partial y}=-6y+b$$

$$\Rightarrow 0=\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(2,4)}=-8+a\Rightarrow a=8$$

$$0=\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(2,4)}=-24+b\Rightarrow b=24$$

Ahora:

$$30=U(2,4)=-8-48+8\cdot 2+24\cdot 4+c$$

$$c=-26$$

③ Sea P la función utilidad, entonces la función a maximizar es

$$P(x,y)=12x^{3/4}y^{1/4}-x-y$$

sujeta a $x+y=60000$.

Consideremos la función,

$$F(x,y,\lambda)=P(x,y)-\lambda g(x,y)$$

$$=12x^{3/4}y^{1/4}-x-y-\lambda x-\lambda y+60000\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=9x^{-1/4}y^{1/4}-1-\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3x^{3/4}y^{-3/4}-1-\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=-x-y+60000$$

Resolvamos

$$\begin{cases}9x^{-1/4}y^{1/4}-1-\lambda=0 & ①\\ 3x^{3/4}y^{-3/4}-1-\lambda=0 & ②\\ -x-y+60000=0 & ③\end{cases}$$

De ① y ②

$$9x^{-1/4}y^{1/4}=3x^{3/4}y^{-3/4}$$

$$3y=x$$

Reemplazamos en ③

$$-3y-y+60000=0\Rightarrow y=15000 \wedge x=45000$$

④ $P(l,k)=0{,}54l^2-0{,}02l^3+1{,}89k^2-0{,}09k^3$

$$\frac{\partial P}{\partial l}=1{,}08l-0{,}06l^2 \wedge \frac{\partial P}{\partial k}=3{,}78k-0{,}27k^2$$

$$\begin{cases}1{,}08l-0{,}06l^2=0\\ 3{,}78k-0{,}27k^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}l(1{,}08-0{,}06l)=0\\ k(3{,}78-0{,}27k)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}l=0 \text{ ó } l=18\\ k=0 \text{ ó } k=14\end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,0)$; $(0,14)$; $(18,0)$; $(18,14)$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial l^2}=1{,}08-0{,}12l\ ;\ \frac{\partial^2 P}{\partial k^2}=3{,}78-0{,}54k\ ;\ \frac{\partial^2 P}{\partial l\partial k}=0$$

(l,k)	$\frac{\partial^2 P}{\partial l^2}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial l\partial k}$	D	naturaleza
$(0,0)$	1,08	3,78	0	4,0824	mín
$(0,14)$	1,08	-3,78	0	-4,0824	p. silla
$(18,0)$	-1,08	3,78	0	-4,0824	p. silla
$(18,14)$	-1,08	-3,78	0	4,0824	máx

La producción es máxima cuando $l=18 \wedge k=14$

2015-2

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201530 B

Nombre completo: Solucionario

1. Halle los puntos críticos de la siguiente función:

$$f(x,y) = \frac{10}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - 15x^2 + 2y^2 - 8y + 14$$

---

2. Suponga que la función de costos conjuntos

$$C(x,y) = 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 3xy + ax + by + c$$

tiene un valor mínimo de 20 cuando $x = 1$ y $y = 2$. Determine los valores de las constantes a, b y c.

---

3. Una compañía tiene un presupuesto mensual para publicidad de \$ 80.000. Se estima que si se gastan x dólares cada mes en publicidad por televisión, y y dólares cada mes en publicidad en periódicos, entonces las ventas mensuales estarán dadas por

$$S = 90x^{1/4}y^{3/4} \quad \text{dólares.}$$

Si la utilidad mensual obtenida es el 10 % de las ventas, menos el costo de publicidad, determine cómo se debe asignar el presupuesto publicitario para maximizar la utilidad mensual.

---

4. Sea P una función de producción dada por

$$P(l,k) = 1,08l^2 - 0,03l^3 + 1,68k^2 - 0,08k^3,$$

donde l y k son las cantidades de trabajo y capital, respectivamente, y P es la cantidad producida. Encuentre los valores de l y k que maximizan P.

Tiempo máximo: 105 minutos. Todos los puntos tienen la misma valoración.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

(1) $f(x,y) = \frac{10}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - 15x^2 + 2y^2 - 8y + 14$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x^2 - 30x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^2 + 4y - 8$$

Para hallar los puntos críticos resolvamos

$$\begin{cases} 10x^2 - 30x = 0 \\ 4y^2 + 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x(x-3) = 0 \\ 4(y^2+y-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x(x-3) = 0 \\ 4(y+2)(y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ó } x=3 \\ y=-2 \text{ ó } y=1 \end{cases}$$

Puntos críticos: $(0,-2)$; $(0,1)$
$(3,-2)$; $(3,1)$

(3) Sea P la función utilidad, entonces la función a maximizar es

$$P(x,y) = 9x^{1/4}y^{3/4} - x - y$$

sujeta a $x + y = 80\,000$.

Consideremos la función,

$$F(x,y,\lambda) = P(x,y) - \lambda g(x,y)$$
$$= 9x^{1/4}y^{3/4} - x - y - \lambda x - \lambda y + 80000\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{9}{4}x^{-3/4}y^{3/4} - 1 - \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{27}{4}x^{1/4}y^{-1/4} - 1 - \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x - y + 80000$$

Resolvamos

$$\begin{cases} \frac{9}{4}x^{-3/4}y^{3/4} - 1 - \lambda = 0 & (1) \\ \frac{27}{4}x^{1/4}y^{-1/4} - 1 - \lambda = 0 & (2) \\ -x - y + 80000 = 0 & (3) \end{cases}$$

De (1) y (2),

$$\frac{9}{4}x^{-3/4}y^{3/4} = \frac{27}{4}x^{1/4}y^{-1/4}$$

$$y = 3x$$

Reemplazamos en (3)

$$-x - 3x + 80\,000 = 0$$
$$x = 20\,000$$
$$\Rightarrow y = 60\,000$$

(4) $P(l,k) = 1{,}08\,l^2 - 0{,}03\,l^3 + 1{,}68\,k^2 - 0{,}08\,k^3$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = 2{,}16\,l - 0{,}09\,l^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial k} = 3{,}36\,k - 0{,}24\,k^2$$

$$\begin{cases} 2{,}16\,l - 0{,}09\,l^2 = 0 \\ 3{,}36\,k - 0{,}24\,k^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l(2{,}16 - 0{,}09\,l) = 0 \\ k(3{,}36 - 0{,}24\,k) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l=0 \text{ ó } l=24 \\ k=0 \text{ ó } k=14 \end{cases}$$

Puntos críticos $(0,0)$; $(0,14)$; $(24,0)$; $(24,14)$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial l^2} = 2{,}16 - 0{,}18\,l \,; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial k^2} = 3{,}36 - 0{,}48\,k \,; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial l \partial k} = 0.$$

(l,k)	$\frac{\partial^2 P}{\partial l^2}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}$	$\frac{\partial^2 P}{\partial l \partial k}$	D	naturaleza
$(0,0)$	2,16	3,36	0	7,2576	min
$(0,14)$	2,16	-3,36	0	-7,2576	punto silla
$(24,0)$	-2,16	3,36	0	-7,2576	punto silla
$(24,14)$	-2,16	-3,36	0	7,2576	max.

La producción es máxima cuando $l = 24 \wedge k = 14$.

(2) $C(x,y) = 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 3xy + ax + by + c$

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial x}(1,2) = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial y}(1,2) = 0 \\ C(1,2) = 20. \end{cases}$$

Ahora:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 4x + 3y + a \qquad 0 = \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 4 + 6 + a \Rightarrow a = -10$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 3y + 3x + b \qquad 0 = \left.\frac{\partial C}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 6 + 3 + b \Rightarrow b = -9.$$

$$20 = C(1,2) = 2 + 6 + 6 + (-10) + (-9)\cdot 2 + c.$$

$$c = 34.$$