UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201610
FILA A
April 2, 2016

Nombre completo: Solucionario

1. Suponga que para un fabricante el costo $C(x, y)$ de producir x unidades de un producto A y y unidades de un producto B, está dado por

$$C(x, y) = (3x^2 + y^3 + 4)^{1/3}$$

y que las funciones de demanda acopladas para los productos están dadas por

$$x = 10 - p_A + p_B^2 \quad \text{y} \quad y = 20 + p_A - 11p_B,$$

donde p_A y p_B son los precios de A y B, respectivamente.
Use la regla de la cadena para evaluar $\dfrac{\partial C}{\partial p_A}$ y $\dfrac{\partial C}{\partial p_B}$ cuando $p_A = 25$ y $p_B = 4$, e interprete los resultados.

---

2. Encuentre los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 4xy - 2x^4 - y^2 + 4x - 2y$$

y clasifique cada uno como punto donde la función tiene un máximo o mínimo relativo, o un punto de silla.

---

3. Empleando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto, con $P(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$.
A la empresa, cada unidad de mano de obra le cuesta \$ 100 y cada unidad de capital empleado le cuesta \$ 300. La empresa dispone de una suma de \$ 45.000 para propósitos de producción.
Mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, determine las unidades de mano de obra y de capital que la empresa debería utilizar con el objetivo de maximizar su producción.

Resolvamos

$$\begin{cases} \frac{100}{3} l^{-1/3} k^{1/3} - \lambda = 0 \\ \frac{50}{3} l^{2/3} k^{-2/3} - 3\lambda = 0 \\ l + 3k = 450 \quad (*) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \frac{100}{3} l^{-1/3} k^{1/3} &= \lambda \\ \frac{50}{3} l^{2/3} k^{-2/3} &= 3\lambda \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{100/3\, l^{-1/3} k^{1/3}}{50/3\, l^{2/3} k^{-2/3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2k}{l} = \frac{1}{3} \Rightarrow l = 6k$$

Reemplazando en (*)

$$6k + 3k = 450 \Rightarrow 9k = 450$$

$$\Rightarrow k = 50 \ \wedge \ l = 300$$

Tiempo máximo: 90 minutos.
Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

A

1) $\dfrac{\partial C}{\partial P_A} = \dfrac{\partial C}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial P_A} + \dfrac{\partial C}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial P_A}$

$= \frac{1}{3}(3x^2+y^3+4)^{-2/3}\cdot 6x\cdot(-1)$

$+ \frac{1}{3}(3x^2+y^3+4)^{-2/3}\cdot 3y^2\cdot(1)$

Y;

$\dfrac{\partial C}{\partial P_B} = \dfrac{\partial C}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial P_B} + \dfrac{\partial C}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial P_B}$

$= \frac{1}{3}(3x^2+y^3+4)^{-2/3}\cdot 6x\cdot 2P_B$

$+ \frac{1}{3}(3x^2+y^3+4)^{-2/3}\cdot 3y^2\cdot(-11)$

Si $P_A = 25$ y $P_B = 4$, entonces $x = 1$ y $y = 1$. Luego,

$\left.\dfrac{\partial C}{\partial P_A}\right|_{(25,4)} = \frac{1}{3}(8)^{-2/3}\cdot 6\,(-1) + \frac{1}{3}(8)^{-2/3}\cdot \cancel{3}$

$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 6 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$-\frac{1}{4}$

$\left.\dfrac{\partial C}{\partial P_B}\right|_{(25,4)} = \frac{1}{3}(8)^{-2/3}\cdot 6\cdot 2\cdot 4$

$+ \frac{1}{3}(8)^{-2/3}\cdot 3(-11)$

$= 4 - \frac{11}{4} = \frac{5}{4}$

2) $f(x,y) = 4xy - 2x^4 - y^2 + 4x - 2y$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4y - 8x^3 + 4$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x - 2y - 2$

Resolvamos

$\begin{cases} 4y - 8x^3 + 4 = 0 & (1) \\ 4x - 2y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$

De (2):

$4x - 2 = 2y$

$2x - 1 = y.$

Reemplazamos en (1)

$4(2x-1) - 8x^3 + 4 = 0$

$8x \cancel{-4} - 8x^3 \cancel{+4} = 0$

$8x - 8x^3 = 0$

$8x(1-x^2) = 0$

$8x(1-x)(1+x) = 0$

$x=0,\ x=1,\ x=-1$

$y=-1\quad y=1\quad y=-3$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -24x^2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 4$

(a,b)	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$	D	naturaleza
$(0,-1)$	0	-2	4	-16	p. silla
$(1,1)$	-24	-2	4	32	max
$(-1,-3)$	-24	-2	4	32	max

3) $P(l,k) = 50\,l^{2/3}k^{1/3}$

$100l + 300k = 45000$

Consideramos

$F(l,k,\lambda) = 50\,l^{2/3}k^{1/3} - \lambda(l + 3k - 450)$

$\dfrac{\partial F}{\partial l} = \frac{100}{3}l^{-1/3}k^{1/3} - \lambda$

$\dfrac{\partial F}{\partial k} = \frac{50}{3}l^{2/3}k^{-2/3} - 3\lambda$

$\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -(l + 3k - 450)$

$\begin{cases} \frac{100}{3}l^{-1/3}k^{1/3} = \lambda \\ \frac{50}{3}l^{2/3}k^{-2/3} = 3\lambda \\ l + 3k = 450 \end{cases}$

$\Downarrow$

$k = 50 \ \wedge\ l = 300$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201610
FILA B
April 2, 2016

Nombre completo: Solucionario

1. Suponga que para un fabricante el costo $C(x, y)$ de producir x unidades de un producto A y y unidades de un producto B, está dado por
$$C(x, y) = (x^3 + 3y^2 + 4)^{1/3}$$
y que las funciones de demanda acopladas para los productos están dadas por
$$x = 20 - 11p_A + p_B \quad \text{y} \quad y = 10 + p_A^2 - p_B,$$
donde p_A y p_B son los precios de A y B, respectivamente.
Use la regla de la cadena para evaluar $\dfrac{\partial C}{\partial p_A}$ y $\dfrac{\partial C}{\partial p_B}$ cuando $p_A = 4$ y $p_B = 25$, e interprete los resultados.

---

2. Encuentre los puntos críticos de la función
$$f(x, y) = x^4 - x^2 + 2x + 2xy + y^2 + 2y + 5$$
y clasifique cada uno como punto donde la función tiene un máximo o mínimo relativo, o un punto de silla.

---

3. Empleando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto, con $P(L, K) = 25L^{1/3}K^{2/3}$.
A la empresa, cada unidad de mano de obra le cuesta \$ 200 y cada unidad de capital empleado le cuesta \$ 600. La empresa dispone de una suma de \$ 90.000 para propósitos de producción.
Mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, determine las unidades de mano de obra y de capital que la empresa debería utilizar con el objetivo de maximizar su producción.

Tiempo máximo: 90 minutos.
Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

B

1) $\dfrac{\partial C}{\partial P_A} = \dfrac{\partial C}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial P_A} + \dfrac{\partial C}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial P_A}$

$= \frac{1}{3}(x^3+3y^2+4)^{-2/3}\cdot 3x^2\cdot(-11)$

$+ \frac{1}{3}(x^3+3y^2+4)^{-2/3}\cdot 6y\cdot 2P_A$

y,

$\dfrac{\partial C}{\partial P_B} = \dfrac{\partial C}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial P_B} + \dfrac{\partial C}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial P_B}$

$= \frac{1}{3}(x^3+3y^2+4)^{-2/3}\cdot 3x^2\,(1)$

$+ \frac{1}{3}(x^3+3y^2+4)^{-2/3}\cdot 6y\cdot(-1)$

Si $P_A = 4$ y $P_B = 25$, entonces $x=1 \wedge y=1$. Luego,

$\left.\dfrac{\partial C}{\partial P_A}\right|_{(4,25)} = \frac{1}{3}(8)^{-2/3}\cdot 3(-11)$

$+ \frac{1}{3}(8)^{-2/3}\cdot 6\cdot 2\cdot 4$

$= -\frac{11}{4} + 4 = 5/4$

$\left.\dfrac{\partial C}{\partial P_B}\right|_{(4,25)} = \frac{1}{3}(8)^{-2/3}\cdot 3$

$+ \frac{1}{3}(8)^{-2/3}\cdot 6(-1)$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4}$

2) $f(x,y) = x^4 - x^2 + 2x + 2xy + y^2 + 2y + 5$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x + 2 + 2y$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y + 2$

Resolvamos

$$\begin{cases} 2x^3 - x + 1 + y = 0 & (1) \\ x + y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2): $y = -x-1$

Reemplazamos en (1)

$2x^3 - x + \cancel{1} - x - \cancel{1} = 0$

$2x^3 - 2x = 0$

$2x(x^2-1) = 0$

$x=0,\ x=1,\ x=-1$

$y=-1,\ y=-2,\ y=0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2$

(a,b)	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$	D	naturaleza
(0,-1)	-2	2	2	-8	punto silla
(1,-2)	10	2	2	16	min
(-1,0)	10	2	2	16	min

3) $P(l,k) = 25\,l^{1/3}k^{2/3}$

$200l + 600k = 90000$

Consideramos

$F(l,k,\lambda) = 25\,l^{1/3}k^{2/3} - \lambda(l + 3k - 450)$

$\dfrac{\partial F}{\partial l} = \frac{25}{3}\,l^{-2/3}k^{2/3} - \lambda$

$\dfrac{\partial F}{\partial k} = \frac{50}{3}\,l^{1/3}k^{-1/3} - 3\lambda$

$\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -(l + 3k - 450)$

Resolvamos

$\frac{25}{3}\,l^{-2/3}k^{2/3} = \lambda$ (1)

$\frac{50}{3}\,l^{1/3}k^{-1/3} = 3\lambda$ (2)

$l + 3k = 450$ (3)

(1) ÷ (2) : $\dfrac{25/3\; l^{-2/3}k^{2/3}}{50/3\; l^{1/3}k^{-1/3}} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{k}{2l} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow k = \dfrac{2l}{3}$. Reemplazamos en (3)

$l + \cancel{3}\cdot\dfrac{2l}{\cancel{3}} = 450$

$3l = 450$

$l = 150 \wedge k = 100$