UNIVERSIDAD DEL NORTE
INTERSEMESTRAL
SEGUNDO PARCIAL DE CÁLCULO III (ANEC)
JUNIO 27 DE 2016

Nombre: ____

1. Para $f(x,y) = e^{xy}$, verfique que

$$f_{xx}(x,y) + f_{xy}(x,y) + f_{yx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = f(x,y)\left((x+y)^2 + 2\right)$$

2. Suponga que el costo c de producir q_A unidades del producto A, y q_B unidades del producto B está dado por

$$c = \left(q_A^3 + 3q_B^2 + 4\right)^{1/3}$$

y que las funciones de demanda para los productos están dadas por

$$q_A = 20 - 11p_A + p_B$$

y

$$q_B = 10 + p_A^2 - p_B.$$

Use la regla de la cadena para evaluar $\dfrac{\partial c}{\partial p_A}$ y $\dfrac{\partial c}{\partial p_B}$ cuando $p_A = 4$ y $p_B = 25$.

3. En una oficina, dos equipos C y D se utilizan c y d horas, respectivamente. Si la producción diaria Q es una función de c y d, a saber

$$Q(c,d) = 18c + 20d - 2c^2 - 4d^2 - cd$$

encuentre los valores de c y d que maximizan a Q.

4. Para surtir una orden de 200 unidades de su producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos fábricas, fábrica 1 y fábrica 2. La función de costo total esta dada por

$$f(q_1, q_2) = 3q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2$$

donde q_1 y q_2 son los números de unidades producidas en las fábricas 1 y 2, respectivamente. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minizar los costos? (Puede suponerse que el punto crítico obtenido correponde al costo mínimo.)

① $f(x,y) = e^{xy}$

$f_x = y e^{xy} \wedge f_y = x e^{xy}$

$f_{xy} = 1 e^{xy} + y \cdot x e^{xy}$

$= e^{xy} + xy e^{xy}$

$f_{yx} = 1 \cdot e^{xy} + x y e^{xy}$

$= e^{xy} + xy e^{xy}$

$f_{xx} = y^2 e^{xy} \wedge f_{yy} = x^2 e^{xy}$.

Entonces,

$f_{xx} + f_{xy} + f_{yx} + f_{yy}$

$= y^2 e^{xy} + e^{xy} + xy e^{xy}$

$+ e^{xy} + xy e^{xy} + x^2 e^{xy}$

$= e^{xy} (x^2 + 2xy + y^2 + 2)$

$= e^{xy} ((x+y)^2 + 2)$

② $\frac{\partial c}{\partial P_A} = \frac{\partial c}{\partial q_A} \cdot \frac{\partial q_A}{\partial P_A} + \frac{\partial c}{\partial q_B} \cdot \frac{\partial q_B}{\partial P_A}$

$= \frac{1}{3} (q_A^3 + 3q_B^2 + 4)^{-2/3} \cdot 3 q_A^2 \cdot (-11)$

$+ \frac{1}{3} (q_A^3 + 3q_B^2 + 4)^{-2/3} \cdot 6q_B \cdot 2P_A$

y,

$\frac{\partial c}{\partial P_B} = \frac{\partial c}{\partial q_A} \cdot \frac{\partial q_A}{\partial P_B} + \frac{\partial c}{\partial q_B} \cdot \frac{\partial q_B}{\partial P_B}$

$= \frac{1}{3} (q_A^3 + 3q_B^2 + 4)^{-2/3} \cdot 3 q_A^2 \cdot 1$

$+ \frac{1}{3} (q_A^3 + 3q_B^2 + 4)^{-2/3} \cdot 6q_B \cdot (-1)$

Si $P_A = 4$ y $P_B = 25$, entonces

$x = 1 \wedge y = 1$. Luego

$\left.\frac{\partial c}{\partial P_A}\right|_{(4,25)} = \frac{5}{4} \wedge \left.\frac{\partial c}{\partial P_B}\right|_{(4,25)} = -\frac{1}{4}$

③ $Q(c,d) = 18c + 20d - 2c^2 - 4d^2 - cd$

$\frac{\partial Q}{\partial c} = 18 - 4c - d \wedge \frac{\partial Q}{\partial d} = 20 - 8d - c$

Resolvamos

$$\begin{cases} 18-4c-d=0 \\ 20-8d-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18-4c-d=0 \quad (*) \\ -80+32d+4c=0 \end{cases}$$

$-62 + 31d = 0$

$d = 62/31$

$d = 2$

Reemplazamos en (*)

$18 - 4c - 2 = 0$

$16 - 4c = 0$

$c = 4$

Punto crítico: $(4,2)$

$\frac{\partial^2 Q}{\partial c^2} = -4$; $\frac{\partial^2 Q}{\partial d^2} = -8$; $\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial d} = -1$

$\Rightarrow D = (-4)(-8) - (-1)^2 > 0$. Entonces Q tiene un máx en $(4,2)$.

④ $f(q_1, q_2) = 3q_1^2 + q_1 q_2 + 2q_2^2 \qquad q_1 + q_2 = 200$

Consideremos

$F(q_1, q_2, \lambda) = 3q_1^2 + q_1 q_2 + 2q_2^2 - \lambda(q_1 + q_2 - 200)$

$\frac{\partial F}{\partial q_1} = 6q_1 + q_2 - \lambda$

$\frac{\partial F}{\partial q_2} = q_1 + 4q_2 - \lambda$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -q_1 - q_2 + 200$

Resolvemos

$$\begin{cases} 6q_1 + q_2 - \lambda = 0 \quad (i) \\ q_1 + 4q_2 - \lambda = 0 \quad (ii) \\ -q_1 - q_2 + 200 = 0 \quad (iii) \end{cases}$$

De (i) y (ii):

$6q_1 + q_2 = q_1 + 4q_2$

$5q_1 - 3q_2 = 0 \quad (iv)$

Resolvemos

$$\begin{cases} 5q_1 - 3q_2 = 0 \\ +3q_1 + 3q_2 - 600 = 0 \end{cases}$$

$8q_1 = 600$

$q_1 = 75 \wedge q_2 = 125$