UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201630
Fila A
September 17, 2016

Nombre completo: Solucionario Código:

1. Si $w = e^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2)$, donde $x = (r-s)^2$, $y = (r+s)^2$ y $z = (s-r)^2$, evalúe $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ cuando $r = 1$ y $s = 1$.

---

2. Clasifique los puntos críticos de la función dada en máximos relativos, mínimos relativos, puntos de silla o ninguno de estos.

$$f(x, y) = \frac{1}{3}\left(x^3 + 8y^3\right) - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1$$

---

3. Suponga que una función de producción de una empresa está dada por

$$P(l, k) = 160l + 600k + 4lk - 6l^2 - 8k^2,$$

donde l y k son las unidades de mano de obra y de capital, respectivamente, y P es la cantidad producida. Si cada unidad de l cuesta \$ 18 y cada unidad de k cuesta \$ 24, y la empresa puede vender todo lo que produce en \$ 30 por unidad,

(a) ¿Cuántas unidades de l y k maximizarían las utilidades de la empresa?

(b) ¿Cuál es la utilidad máxima de la empresa?

---

4. Una compañía dispone de 1.200 dólares para gastos de publicidad. Se ha determinado que la utilidad obtenida por gastar x dólares en publicidad en radio y y dólares en televisión, es

$$U(x, y) = 3\ln\left(x^3\sqrt{y}\right).$$

Si cada aviso publicitario en radio y televisión cuestan 40 y 60 dólares, respectivamente,

(a) ¿Cómo debe distribuirse el gasto publicitario para maximizar la utilidad ?

(b) ¿Cuál es la utilidad máxima obtenida?

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

1) $w = e^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2)$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2+2x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = e^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2+2y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = e^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2+2z)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -2(r-s) \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = 2(r+s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2(s-r)$$

Cuando $r=1$ y $s=1$ tenemos $x=0$, $y=4$, $z=0$. Entonces,

$$\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{\substack{r=1\\ s=s}} = e^4(16+8)\cdot 4 = 96e^4$$

2) $f(x,y) = \frac{1}{3}(x^3+8y^3) - 2(x^2+y^2)+1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2-4x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 8y^2-4y$$

Resolvamos

$$\begin{cases} x^2-4x=0 \\ 8y^2-4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0,\ x=4 \\ y=0,\ y=1/2 \end{matrix}$$

Puntos críticos:

$(0,0)$, $(0,1/2)$, $(4,0)$, $(4,1/2)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x-4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 16y-4 \ ; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

(a,b)	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	D	Clasificación
$(0,0)$	-4	-4	0	16	máx
$(0,1/2)$	-4	4	0	-16	p. silla
$(4,0)$	4	-4	0	-16	p. silla
$(4,1/2)$	4	4	0	16	min

3) $P(l,k) = 160l + 600k + 4lk - 6l^2 - 8k^2$

Sea U la función utilidad, entonces

U = ingresos − costos

$= 30P - (18l + 24k)$

$= 4800l + 18000k + 120lk - 180l^2 - 240k^2 - 18l - 24k$

$= -180l^2 - 240k^2 + 120lk + 4782l + 17976k$

Ahora,

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -360l + 120k + 4782$$

$$\frac{\partial U}{\partial k} = -480k + 120l + 17976$$

Resolvamos

$$\begin{cases} -60l + 20k + 797 = 0 \\ -20k + 5l + 749 = 0 \end{cases}$$

$$-55l + 1546 = 0$$

$$l = \frac{1546}{55} \Rightarrow k = \frac{1957}{44}$$

$U_{ll} = -360$; $U_{kk} = -480$; $U_{kl} = 120$

$$\Rightarrow D\left(\frac{1546}{55}, \frac{1957}{44}\right) = 158400$$

Entonces

U tiene un máx en $\left(\frac{1546}{55}, \frac{1957}{44}\right)$

La utilidad máxima es

$$U\left(\frac{1546}{55}, \frac{1957}{44}\right) \approx 466970{,}56$$

4) $U(x,y) = 3\ln(x^3\sqrt{y})$, $40x + 60y = 1200$

Reescribiendo, obtenemos

$U = 9\ln x + \frac{3}{2}\ln y$; $g(x,y) = 2x+3y-60 = 0$

Consideremos la función

$$F(x,y,\lambda) = 9\ln x + \frac{3}{2}\ln y - \lambda(2x+3y-60)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{9}{x} - 2\lambda \ ; \ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{3}{2y} - 3\lambda \ ; \ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -2x-3y+60.$$

Resolvamos

$$\begin{cases} \frac{9}{x} - 2\lambda = 0 \\ \frac{3}{2y} - 3\lambda = 0 \\ -2x-3y+60 = 0 \ (*) \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 9/2\lambda \\ y = 1/2\lambda \end{matrix}$$

Reemplazamos en (*)

$$-\frac{9}{\lambda} - \frac{3}{2\lambda} + 60 = 0.$$

$$-18 - 3 + 120\lambda = 0$$

$$\lambda = 7/40$$

$$\Rightarrow x = \frac{180}{7} \wedge y = \frac{20}{7}.$$

La utilidad máxima es

$$U\left(\frac{180}{7}, \frac{20}{7}\right) = 9\ln\left(\frac{180}{7}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{20}{7}\right) \approx 30{,}79$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201630
Fila B
September 17, 2016

Nombre completo: Solucionario Código:

1. Si $w = e^{x+y+z}(x^3+y^3+z^3)$, donde $x = (r+s)^2$, $y = (r+s)^2$ y $z = (r-s)^2$, evalúe $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ cuando $r = 1$ y $s = 1$.

---

2. Clasifique los puntos críticos de la función dada en máximos relativos, mínimos relativos, puntos de silla o ninguno de estos.

$$f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6(x^2+y^2) + 3$$

---

3. Una compañía dispone de 1.600 dólares para gastos de publicidad. Se ha determinado que la utilidad obtenida por gastar x dólares en publicidad en radio y y dólares en televisión, es

$$U(x,y) = 4\ln\left(x^2\sqrt[3]{y}\right).$$

Si cada aviso publicitario en radio y televisión cuestan 60 y 80 dólares, respectivamente,

(a) ¿Cómo debe distribuirse el gasto publicitario para maximizar la utilidad ?

(b) ¿Cuál es la utilidad máxima obtenida?

---

4. Suponga que la función de producción de una empresa está dada por

$$P(l,k) = 240l + 900k + 6lk - 9l^2 - 12k^2,$$

donde l y k son las unidades de mano de obra y de capital, respectivamente, y P es la cantidad producida. Si cada unidad de l cuesta \$ 24 y cada unidad de k cuesta \$ 36, y la empresa puede vender todo lo que produce en \$ 45 por unidad,

(a) ¿Cuántas unidades de l y k maximizarían las utilidades de la empresa?

(b) ¿Cuál es la utilidad máxima de la empresa?

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

① $w = e^{x+y+z}(x^3+y^3+z^3)$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^{x+y+z}(x^3+y^3+z^3+3x^2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = e^{x+y+z}(x^3+y^3+z^3+3y^2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = e^{x+y+z}(x^3+y^3+z^3+3z^2)$$

$\frac{\partial x}{\partial r} = 2(r+s)$ $\quad \frac{\partial y}{\partial r} = 2(r+s)$

$\frac{\partial z}{\partial r} = 2(r-s)$

Cuando $r=1$ y $s=1$ tenemos

$x=4$, $y=4$, $z=0$. Entonces;

$$\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{\substack{r=1\\s=1}} = 2e^8(128+48)\cdot 4 = 1408e^8$$

② $f(x,y) = x^3+8y^3-6(x^2+y^2)+3$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-12x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2-12y$

Resolvamos

$$\begin{cases} 3x^2-12x=0 \\ 24y^2-12y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0,\ x=4 \\ y=0,\ y=1/2 \end{matrix}$$

Puntos críticos

$(0,0)$, $(0,1/2)$, $(4,0)$, $(4,1/2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x-12$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y-12$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0$.

(a,b)	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	D	Clasificación
$(0,0)$	-12	-12	0	144	máx
$(0,1/2)$	-12	12	0	-144	p. silla
$(4,0)$	12	-12	0	-144	p. silla
$(4,1/2)$	12	12	0	12	mín

④ $P(l,k) = 240l + 900k + 6lk - 9l^2 - 12k^2$

Sea U la función utilidad, entonces

U = ingresos − costos

$= 45P - (24l+36k)$

$= 10800l + 40500k + 270lk - 405l^2 - 540k^2 - 24l - 36k$

$= -405l^2 - 540k^2 + 270lk + 10776l + 40464k$

Ahora,

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -810l + 270k + 10776$$

$$\frac{\partial U}{\partial k} = -1080k + 270l + 40464$$

Resolvamos

$$\begin{cases} -135l+45k+1796=0 & \text{(i)} \\ -60k+15l+2248=0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Multiplicando la ec. (ii) por 9, tenemos

$$\begin{cases} -135l+45k+1796=0 \\ -540k+135l+20232=0 \end{cases}$$

$-495k + 22028 = 0$

$\Rightarrow k = \frac{22028}{495} \wedge l = \frac{13928}{495}$

$U_{ll} = -810$; $U_{kk} = -1080$; $U_{kl} = 270$

$\Rightarrow D\left(\frac{22028}{495}, \frac{13928}{495}\right) = 801900$

Entonces

U tiene un máx en $\left(\frac{22028}{495}, \frac{13928}{495}\right)$.

La utilidad máxima es

$$U\left(\frac{22028}{495}, \frac{13928}{495}\right) \approx 1051948{,}60$$

③ $U(x,y) = 4\ln(x^2\sqrt[3]{y})$, $60x+80y = 1600$

Reescribiendo, obtenemos

$U = 8\ln x + \frac{4}{3}\ln y$; $g(x,y) = 3x+4y-80=0$

Consideramos la función

$$F(x,y,\lambda) = 8\ln x + \frac{4}{3}\ln y - \lambda(3x+4y-80) = 0$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{8}{x} - 3\lambda$; $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{4}{3y} - 4\lambda$; $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -3x-4y+80$

Resolvamos

$$\begin{cases} \frac{8}{x} - 3\lambda = 0 \\ \frac{4}{3y} - 4\lambda = 0 \\ -3x-4y+80=0 \ (*) \end{cases} \quad x = 8/3\lambda,\ y = 1/3\lambda$$

Reemplazamos en $(*)$

$-\frac{8}{\lambda} - \frac{4}{3\lambda} + 80 = 0$

$-24 - 4 + 240\lambda = 0$

$\lambda = 7/60$

$\Rightarrow x = 160/7 \wedge y = 20/7$

La utilidad máxima es

$$U(160/7, 20/7) = 8\ln(160/7) + 4/3\ln(20/7) \approx 26{,}43$$