UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201710
Fila A
March 24, 2017

Nombre completo: Solucionario Código:

1. Si $w = (4x + 3y + 5z)^3$ con $x = r^2 s$, $y = r - 2s$ y $z = 2r + 3s$, evalúe, usando regla de la cadena, $\dfrac{\partial w}{\partial s}$, cuando $r = 1$ y $s = 2$.

---

2. Encuentre los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 2x^4 + 64x - 2y^3 + 24y - 14$$

y clasifique cada uno como puntos donde la función tiene máximo o mínimo relativo, o punto de silla.

---

3. Si se gastan x miles de dólares en mano de obra, y miles de dólares en equipos y z miles de dólares en materia prima, la producción de cierta fábrica es $P(x, y, z) = xy^2z$ unidades. Si se dispone de 840 mil dólares para gastar,

   (a) ¿Cuánto debe asignarse a mano de obra, cuánto a equipos y cuánto a materia prima, para generar la máxima producción posible?

   (b) ¿Cuál es la producción máxima alcanzada?

---

4. Una compañía produce dos productos A y B, para los cuales los costos promedio de producción son constantes de \$ 60 y \$ 70 dólares por unidad, respectivamente. Las funciones de demanda para A y B están dadas por

$$q_A = 5p_B - 5p_A \quad \text{y} \quad q_B = 500 + 5p_A - 2p_B.$$

   (a) Encuentre los precios p_A y p_B que maximizan la utilidad de la compañía.

   (b) ¿Cuál es la utilidad máxima de la compañía?

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

① $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$

Ahora bien,

$\frac{\partial w}{\partial x} = 12(4x+3y+5z)^2 ; \frac{\partial x}{\partial s} = r^2$

$\frac{\partial w}{\partial y} = 9(4x+3y+5z)^2 ; \frac{\partial y}{\partial s} = -2$

$\frac{\partial w}{\partial z} = 15(4x+3y+5z)^2 ; \frac{\partial z}{\partial s} = 3.$

Cuando $r=1$ y $s=2$, tenemos $x=2$, $y=-3$ y $z=8$. En consecuencia,

$$\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{\substack{r=1\\ s=2}} = 39^2[12\cdot 1 + 9(-2) + 15\cdot 3]$$
$$= 39^3 = 59319$$

② $\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3+64$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -6y^2+24$

Puntos críticos

$$\begin{cases} 8x^3+64 = 0 \\ -6y^2+24=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8(x^3+8)=0 \\ -6(y^2-4)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \text{ ó } y=-2 \end{cases}$$

La función f tiene dos puntos críticos: $(-2,2)$ y $(-2,-2)$.

$f_{xx} = 24x^2$

$f_{yy} = -12y \wedge f_{xy} = 0$

(a,b)	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	D	Naturaleza
$(-2,2)$	96	-24	0	-2304	p. silla
$(-2,-2)$	96	24	0	2304	mín. relativo

③ $P(x,y,z) = xy^2z$

$x+y+z = 840.$

Sol:

Sea $g(x,y,z) := x+y+z$,

$$\begin{cases} \nabla P = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z)=840 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (y^2z, 2xyz, xy^2) = \lambda(1,1,1) \\ x+y+z=840 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2z = \lambda & (i) \\ 2xyz = \lambda & (ii) \\ xy^2 = \lambda & (iii) \\ x+y+z=840 & (iv) \end{cases}$$

Haciendo (i) ÷ (iii), tenemos

$\frac{z}{x} = 1 \Rightarrow z = x \quad (v)$

Haciendo (ii) ÷ (iii), tenemos

$\frac{2z}{y} = 1. \Rightarrow 2z = y \quad (vi)$

Reemplazando (v) y (vi) en (iv), obtenemos

$z+2z+z=840 \Rightarrow z=210 ; y=420 ; x=210$

Ahora bien,

$P(210,420,210) = 7.779'240.000$

$P(0,0,840) = 0$

Entonces, la producción máx. es 7.779'240.000

④ Sea U la utilidad de la compañía, entonces

U = ingresos − costos

$= P_A q_A + P_B q_B - (60q_A + 70q_B).$

$= -5P_A^2 - 2P_B^2 + 10P_AP_B - 50P_A + 340P_B - 35000$

$\frac{\partial U}{\partial P_A} = -10P_A + 10P_B - 50 \wedge \frac{\partial U}{\partial P_B} = -4P_B + 10P_A + 340$

Resolvemos

$$\begin{cases} -10P_A + 10P_B - 50 = 0 \\ 10P_A - 4P_B + 340 = 0 \end{cases}$$

y obtenemos

$$P_A = -160/3 \wedge P_B = -145/3$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201710
Fila B
March 24, 2017

Nombre completo: Solucionario Código:

1. Si $w = (3x + 5y + 4z)^3$ con $x = r - 2s$, $y = 2r + 3s$ y $z = r^2 s$, evalúe, usando regla de la cadena, $\dfrac{\partial w}{\partial r}$, cuando $r = 1$ y $s = 2$.

---

2. Encuentre los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = -x^4 - 32x + y^3 - 12y + 7$$

y clasifique cada uno como puntos donde la función tiene máximo o mínimo relativo, o punto de silla.

---

3. Si se gastan x miles de dólares en mano de obra, y miles de dólares en equipos y z miles de dólares en materia prima, la producción de cierta fábrica es $P(x, y, z) = x^2yz$ unidades. Si se dispone de 720 mil dólares para gastar,

   (a) ¿Cuánto debe asignarse a mano de obra, cuánto a equipos y cuánto a materia prima, para generar la máxima producción posible?

   (b) ¿Cuál es la producción máxima alcanzada?

---

4. Una compañía produce dos productos A y B, para los cuales los costos promedio de producción son constantes de \$ 70 y \$ 60 dólares por unidad, respectivamente. Las funciones de demanda para A y B están dadas por

$$q_A = 500 - 2p_A + 5p_B \qquad \text{y} \qquad q_B = 5p_A - 5p_B.$$

   (a) Encuentre los precios p_A y p_B que maximizan la utilidad de la compañía.

   (b) ¿Cuál es la utilidad máxima de la compañía?

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

① $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$

Ahora bien,

$\frac{\partial w}{\partial x} = 9(3x+5y+4z)^2$; $\frac{\partial x}{\partial r} = 1$

$\frac{\partial w}{\partial y} = 15(3x+5y+4z)^2$; $\frac{\partial y}{\partial r} = 2$

$\frac{\partial w}{\partial z} = 12(3x+5y+4z)^2$; $\frac{\partial z}{\partial r} = 2rs$

Cuando $r=1$ y $s=2$, tenemos $x=-3$, $y=8$ y $z=2$. Luego

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{\substack{r=1\\ s=2}} = 39^2[9+30+48]$$
$$= 132327$$

② $\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3-32$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2-12$

Puntos críticos

$$\begin{cases}-4x^3-32=0\\ 3y^2-12=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-4(x^3+8)=0\\ 3(y^2-4)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-2\\ y=2 \text{ ó } y=-2\end{cases}$$

La función f tiene dos puntos críticos: $(-2,2)$ y $(-2,-2)$

$f_{xx} = -12x^2$; $f_{yy} = 6y$; $f_{xy} = 0$

(a,b)	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	D	Naturaleza
$(-2,2)$	-48	12	0	-576	p. silla
$(-2,-2)$	-48	-12	0	576	max. relativo

③ $P(x,y,z) = x^2yz$

$x+y+z = 720$.

Sol:

Sea $g(x,y,z) := x+y+z$

$$\begin{cases}\nabla P = \lambda g\\ g(x,y,z) = 720\end{cases} \rightarrow \begin{cases}(2xyz, x^2z, x^2y) = \lambda(1,1,1)\\ x+y+z = 720\end{cases}$$

$$\begin{cases}2xyz = \lambda & (i)\\ x^2z = \lambda & (ii)\\ x^2y = \lambda & (iii)\\ x+y+z = 720 & (iv)\end{cases}$$

Haciendo (i) ÷ (ii), tenemos
$\frac{2y}{x} = 1 \Rightarrow 2y = x$ (v)

Haciendo (ii) ÷ (iii), obtenemos
$\frac{z}{y} = 1 \Rightarrow z = y$ (vi)

Reemplazando (v) y (vi) en (iv), obtenemos

$$2y+y+y = 720 \Rightarrow y = 180,\ x = 360,\ z = 180$$

Ahora bien,

$P(360,180,180) = 4.199'040.000$

$P(0,0,720) = 0$

Entonces, la producción máx es $4.199'040.000$

④ Sea U la utilidad de la compañía, entonces.

U = ingresos − costos

$= P_A q_A + P_B q_B - (70q_A + 60q_B)$

$= -2P_A^2 - 5P_B^2 + 10P_AP_B + 340P_A - 50P_B - 35000$

$\frac{\partial U}{\partial P_A} = -4P_A + 10P_B + 340 \wedge \frac{\partial U}{\partial P_B} = -10P_B + 10P_A - 50$

Resolvemos,

$$\begin{cases}-4P_A + 10P_B = -340\\ 10P_A - 10P_B = 50\end{cases}$$

y obtenemos

$$P_A = -145/3 \wedge P_B = -160/3$$