Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201730
Fila B
Septiembre 23 de 2017

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Nombre completo:________________________________Código:________________________________

1. **[10 pts]** Una compañía determina que el costo $C(x, y)$ de producir x unidades de un producto A, y y unidades de un producto B está dado por

$$C(x, y) = (3x^2 + 4y + 2)^{1/2}$$

donde las funciones de demanda están dadas por

$$x = 2r + 4s - 15$$
$$y = r - 3s + 8$$

siendo r y s los precios de A y B, respectivamente. Use la regla de cadena para determinar el costo marginal con respecto al precio de B cuando $r = 2$ y $s = 3$.

---

2. **[10 pts]** Encuentre los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy + 14x$$

y clasifique cada uno como máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

---

3. **[15 pts]** La producción de una fábrica está dada por

$$P(l, k) = 0.108l^2 - 0.003l^3 + 0.168k^2 - 0.008k^3$$

donde l y k son las unidades de mano de obra y de capital, respectivamente.

   (a) [12 pts] ¿Cuántas unidades de l y k maximizarían la producción?

   (b) [3 pts] ¿Cuál es la producción máxima de la fábrica?

---

4. **[15 pts]** Para surtir una orden de 70 unidades de su producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas, planta 1 y planta 2. La función de costo total está dada por

$$C(q_1, q_2) = 0.3q_1^2 + 6q_1 + 18q_2 + 1200$$

donde q_1 y q_2 son los números de unidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minizar los costos?

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución parcial II 201730
fila B

① $\frac{\partial c}{\partial s} = \frac{\partial c}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial c}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$

$= \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+4y+2}}\cdot 4 + \frac{4}{2\sqrt{3x^2+4y+2}}(-3)$

Cuando $r=2$ y $s=3$, tenemos que

$x=1 \wedge y=1$

Entonces,

$\left.\frac{\partial c}{\partial s}\right|_{\substack{r=2\\ s=3}} = \frac{6\cdot 4}{2\cdot 3} - \frac{4\cdot 3}{2\cdot 3} = 2$

② $f(x,y) = 2x^2+y^2-xy+14x$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x-y+14$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y-x$

Puntos críticos

$\begin{cases} 4x-y+14=0 \\ 2y-x=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-4 \\ y=-2 \end{array}$

$f_{xx}=4 \quad f_{yy}=2 \quad f_{xy}=-1$

Dado que

$D(-4,-2) = (4)(2)-(-1)^2 = 7$

entonces f tiene un mínimo relativo en $(-4,-2)$.

③

$P(l,k) = 0{,}108l^2 - 0{,}003l^3 + 0{,}168k^2 - 0{,}008k^3$

$P_l = 0{,}216l - 0{,}009l^2 \wedge P_k = 0{,}336k - 0{,}024k^2$

Puntos críticos

$\begin{cases} 0{,}216l-0{,}009l^2=0 \\ 0{,}336k-0{,}024k^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l(0{,}216-0{,}009l)=0 \\ k(0{,}336-0{,}024k)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} l=0 \text{ ó } l=24 \\ k=0 \text{ ó } k=14 \end{cases}$

Hay 4 puntos críticos

$(0,0) \quad (0,14) \quad (24,0) \quad (24,14)$

$P_{ll} = 0{,}216-0{,}018l \quad P_{kk} = 0{,}336-0{,}048k \quad P_{lk}=0$

(a,b)	$P_{ll}(a,b)$	$P_{kk}(a,b)$	$P_{lk}(a,b)$	D	Clasificación
(0,0)	0,216	0,336	0	0,07	mín. relativo
(0,14)	0,216	−0,336	0	−0,07	p. silla
(24,0)	−0,216	0,336	0	−0,07	p. silla
(24,14)	−0,216	−0,336	0	0,07	máx. relativo

La producción máxima de la fábrica es $\frac{3964}{125} \approx 31{,}712$

④

$F(q_1,q_2,\lambda) = 0{,}3q_1^2 + 6q_1 + 18q_2 + 1200 - \lambda(q_1+q_2-70)$

$F_{q_1} = 0{,}6q_1 + 6 - \lambda\cdot 1$

$F_{q_2} = 18 - \lambda\cdot 1$

$F_\lambda = -(q_1+q_2-70)$.

Resolviendo

$\begin{cases} 0{,}6q_1+6-\lambda=0 \\ 18-\lambda=0 \\ -q_1-q_2+70=0 \end{cases}$

obtenemos

$\lambda=18$

$q_1=20$

$q_2=50$.

$C(20,50) = 2340$.

$C(30,40) = 2370$

Los costos son mínimos cuando $q_1=20 \wedge q_2=50$.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201730
Fila A
Septiembre 23 de 2017

Nombre completo:____________________Código:____________________

1. **[10 pts]** Una compañía determina que el costo $C(x, y)$ de producir x unidades de un producto A, y y unidades de un producto B está dado por

$$C(x, y) = (4x + 3y^2 + 2)^{1/2}$$

donde las funciones de demanda están dadas por

$$x = 4r + 2s - 15$$
$$y = 8 - 3r + s$$

siendo r y s los precios de A y B, respectivamente. Use la regla de cadena para determinar el costo marginal con respecto al precio de A cuando $r = 3$ y $s = 2$.

---

2. **[10 pts]** Encuentre los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + 14y$$

y clasifique cada uno como máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

---

3. **[15 pts]** La producción de una fábrica está dada por

$$P(l, k) = 0.54l^2 - 0.015l^3 + 0.84k^2 - 0.04k^3$$

donde l y k son las unidades de mano de obra y de capital, respectivamente.

(a) [12 pts] ¿Cuántas unidades de l y k maximizarían la producción?

(b) [3 pts] ¿Cuál es la producción máxima de la fábrica?

---

4. **[15 pts]** Para surtir una orden de 100 unidades de su producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas, planta 1 y planta 2. La función de costo total está dada por

$$C(q_1, q_2) = 0.1q_1^2 + 7q_1 + 15q_2 + 1000$$

donde q_1 y q_2 son los números de unidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minizar los costos?

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución parcial II 201730
fila A

① $\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial c}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$

$= \frac{4}{2\sqrt{4x+3y^2+2}}\cdot 4 + \frac{6y}{2\sqrt{4x+3y^2+2}}(-3)$

Cuando $r=3$ y $s=2$, tenemos que $x=1 \wedge y=1$

Entonces,

$\left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{\substack{r=3\\ s=2}} = \frac{4}{2\cdot 3}\cdot 4 - \frac{6\cdot 3}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3}.$

② $f(x,y) = x^2+2y^2-xy+14y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x-y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y-x+14$

Puntos críticos

$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 4y-x+14=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-2 \\ y=-4 \end{array}$

$f_{xx}=2 \quad f_{yy}=4 \quad f_{xy}=-1$

Dado que

$D(-2,-4) = (2)(4)-(-1)^2 = 7$

entonces f tiene un mínimo relativo en $(-2,-4)$.

③ $P(l,k) = 0{,}54l^2 - 0{,}015l^3 + 0{,}84k^2 - 0{,}04k^3$

$P_l = 1{,}08l - 0{,}045l^2 \wedge P_k = 1{,}68k - 0{,}12k^2$

Puntos críticos

$\begin{cases} 1{,}08l - 0{,}045l^2 = 0 \\ 1{,}68k - 0{,}12k^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l(1{,}08-0{,}045l)=0 \\ k(1{,}68-0{,}12k)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} l=0 \text{ ó } l=24 \\ k=0 \text{ ó } k=14 \end{cases}$

Hay 4 puntos críticos

$(0,0) \quad (0,14) \quad (24,0) \quad (24,14).$

$P_{ll} = 1{,}08-0{,}09l \quad P_{kk} = 1{,}68-0{,}24k \quad P_{lk}=0$

(a,b)	$P_{ll}(a,b)$	$P_{kk}(a,b)$	$P_{lk}(a,b)$	D	clasificación
(0,0)	1,08	1,68	0	1,81	mín. relativo
(0,14)	1,08	−1,68	0	−1,81	p. silla
(24,0)	−1,08	1,68	0	−1,81	p. silla
(24,14)	−1,08	−1,68.	0	1,81	máx. relativo

La producción máxima de la fábrica es $\frac{3964}{25} \approx 158{,}56$

④ $F(q_1,q_2,\lambda) = 0{,}1q_1^2 + 7q_1 + 15q_2 + 1000 - \lambda(q_1+q_2-100)$

$F_{q_1} = 0{,}2q_1 + 7 - \lambda\cdot 1$

$F_{q_2} = 15 - \lambda\cdot 1$

$F_\lambda = -(q_1+q_2-100)$

Resolviendo

$\begin{cases} 0{,}2q_1+7-\lambda=0 \\ 15-\lambda=0 \\ -q_1-q_2+100=0 \end{cases}$

obtenemos

$\lambda = 15$

$q_1 = 40$

$q_2 = 60$

$C(40,60) = 2340.$

$C(50,50) = 2350$

Los costos son mínimos cuando $q_1 = 40 \wedge q_2 = 60.$