UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201810

Fila B

Marzo 24 de 2018

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. **[15 pts]** Para un fabricante de cámaras y películas, el costo total C de producir x cámaras y y rollos de película está dado por
$$C(x,y) = x + 0.015xy + 30y + 900.$$
Las funciones de demanda para las cámaras y los rollos fotográficos están dadas por
$$x = 20 + r - 11s \qquad \text{y} \qquad y = 10 - r + s^2$$
donde r es el precio por cámaras y s el precio por rollo de película. Use la regla de la cadena para hallar la tasa de cambio del costo total con respecto al precio del rollo cuando $r = 25$ y $s = 4$.

---

2. **[20 pts]** La única tienda de abarrotes en una pequeña comunidad rural vende dos marcas de jugo congelado de manzana: una marca local, que obtiene a un costo de 40 centavos por lata, y una bien conocida marca nacional que obtiene a un costo de 30 centavos por lata. El abarrotero estima que si la marca local se vende a x centavos por lata y la marca nacional a y centavos por lata, entonces todos los días se venderán aproximadamente $80 - 7x + 6y$ latas de la marca local y $70 + 4x - 5y$ latas de la marca nacional.
a) [5 pts] Verifique que la función utilidad está dada por
$$U(x,y) = -7x^2 + 240x - 5y^2 - 20y + 10xy - 5300.$$
b) [15 pts] ¿Qué precio debe aplicar el abarrotero a cada marca para maximizar la utilidad por la venta del jugo?

---

3. **[15 pts]** La función de producción de una compañía es
$$f(l,k) = 25l + 20k - 3l^2 - k^2.$$
El costo de l y k para la compañía es de 4 y 2 por unidad, respectivamente. Si la compañía quiere que el costo total de entrada sea 50, encuentre la producción máxima posible sujeta a esta restricción de presupuesto. (Puede suponerse que el punto crítico obtenido corresponde a una producción máxima).

Tiempo máximo: 80 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución Parcial II de Cálculo III (ANEC)

fila B

① $\dfrac{\partial c}{\partial s} = \dfrac{\partial c}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial c}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s}$

$= (1+0{,}015y)\cdot(-11) + (0{,}015x+30)\cdot 2s$

Cuando $r=25$ y $s=4$, tenemos $x=1$ y $y=1$. Luego,

$$\left.\frac{\partial c}{\partial s}\right|_{\substack{r=25\\ s=4}} = (1+0{,}015)(-11)+(0{,}015+30)\cdot 8 \approx 229$$

②

a) U = utilidad de la marca local + utilidad de la marca nacional

$= (x-40)(80-7x+6y)+(y-30)(70+4x-5y)$

$= 80x-7x^2+6xy-3200+280x-240y$
$+70y+4xy-5y^2-2100-120x+150y$

$= -7x^2-5y^2+10xy+240x-20y-5300$

b) $U_x = -14x+10y+240$

$U_y = -10y+10x-20$

Resolvemos

$$\begin{cases} -14x+10y+240=0 \\ 10x-10y-20=0 \quad (*) \end{cases}$$

Sumando

$-4x \quad +220=0$

$x=55$

Reemplazando en $(*)$, obtenemos

$y=53$

Punto crítico: $(55,53)$

$U_{xx}=-14 \quad U_{yy}=-10 \quad U_{xy}=10$

$\Rightarrow D(55,53)=(-14)(-10)-(10)^2=40.$

Dado que $D(55,53)>0$ y $U_{xx}(55,53)<0$, entonces U tiene un máx en $(55,53)$.
El abarrotero debe vender la marca local y la marca nacional en 55 y 53, respectivamente, para maximizar la utilidad.

③ $f(\ell,k)=25\ell+20k-3\ell^2-k^2$

$4\ell+2k=50.$

Sea $g(\ell,k)=4\ell+2k-50$. Consideremos

$F(\ell,k,\lambda)=25\ell+20k-3\ell^2-k^2-\lambda(4\ell+2k-50).$

$F_\ell = 25-6\ell-4\lambda$

$F_k = 20-2k-2\lambda$

$F_\lambda = -4\ell-2k+50.$

Resolvemos

$$\begin{cases} 25-6\ell=4\lambda & (i) \\ 20-2k=2\lambda & (ii) \\ -4\ell-2k+50=0 & (iii) \end{cases}$$

$(i)\div(ii):\ \dfrac{25-6\ell}{20-2k}=2$

$25-6\ell=40-4k \Rightarrow -6\ell+4k-15=0$

De (iii) y (iv), obtenemos

$$\begin{cases} -8\ell-4k+100=0 \\ -6\ell+4k-15=0 \end{cases}$$

$-14\ell \quad +85=0.$

$\ell=\dfrac{85}{14} \Rightarrow k=\dfrac{90}{7}.$

La producción máxima sujeta a la restricción es

$f\left(85/14,\ 90/7\right)=\dfrac{3725}{28}\approx 133.$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201810
Fila A
Marzo 24 de 2018

Nombre completo:____________________________________Código:____________________________________

1. **[15 pts]** Para un fabricante de cámaras y películas, el costo total C de producir x cámaras y y rollos de película está dado por
$$C(x,y) = 30x + 0.015xy + y + 900.$$
Las funciones de demanda para las cámaras y los rollos fotográficos están dadas por
$$x = 10 - r + s^2 \qquad \text{y} \qquad y = 20 + r - 11s$$
donde r es el precio por cámaras y s el precio por rollo de película. Use la regla de la cadena para hallar la tasa de cambio del costo total con respecto al precio de la cámara cuando $r = 25$ y $s = 4$.

---

2. **[20 pts]** La única tienda de abarrotes en una pequeña comunidad rural vende dos marcas de jugo congelado de manzana: una marca local, que obtiene a un costo de 30 centavos por lata, y una bien conocida marca nacional que obtiene a un costo de 40 centavos por lata. El abarrotero estima que si la marca local se vende a x centavos por lata y la marca nacional a y centavos por lata, entonces todos los días se venderán aproximadamente $70 - 5x + 4y$ latas de la marca local y $80 + 6x - 7y$ latas de la marca nacional.
a) [5 pts] Verifique que la función utilidad está dada por
$$U(x,y) = -5x^2 + 10xy - 20x - 7y^2 + 240y - 5300.$$
b) [15 pts] ¿Qué precio debe aplicar el abarrotero a cada marca para maximizar la utilidad por la venta del jugo?

---

3. **[15 pts]** La función de producción de una compañía es
$$f(l,k) = 20l + 25k - l^2 - 3k^2.$$
El costo de l y k para la compañía es de 2 y 4 por unidad, respectivamente. Si la compañía quiere que el costo total de entrada sea 50, encuentre la producción máxima posible sujeta a esta restricción de presupuesto. (Puede suponerse que el punto crítico obtenido corresponde a una producción máxima).

Tiempo máximo: 80 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución Parcial II de Cálculo III (ANEC)

fila A

① $\dfrac{\partial c}{\partial r} = \dfrac{\partial c}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial c}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r}$

$= (30 + 0{,}015y)\cdot(-1) + (0{,}015x + 1)\cdot 1$

Cuando $r = 25$ y $s = 4$, tenemos $x = 1$ y $y = 1$. Luego,

$$\left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{\substack{r=25\\ s=4}} = -(30+0{,}015) + (0{,}015+1) = -29$$

②

a) U = utilidad de la marca local + utilidad de la marca nacional

$= (x-30)(70-5x+4y) + (y-40)(80+6x-7y)$

$= 70x - 5x^2 + 4xy - 2100 + 150x - 120y$
$\quad 80y + 6xy - 7y^2 - 3200 - 240x + 280y$

$= -5x^2 - 7y^2 + 10xy - 20x + 240y - 5300$

b) $U_x = -10x + 10y - 20$

$U_y = -14y + 10x + 240$

Resolvamos

$$\begin{cases} -10x + 10y - 20 = 0 & (*) \\ 10x - 14y + 240 = 0 \end{cases}$$

Sumando

$-4y + 220 = 0$

$y = 55$

Reemplazando en (*), obtenemos

$x = 53$

Punto crítico: $(53, 55)$.

$U_{xx} = -10$, $U_{yy} = -14$, $U_{xy} = 10$

$\Rightarrow D(53,55) = (-10)(-14) - (10)^2 = 40$

Dado que $D(53,55) > 0$ y $U_{xx}(53,55) < 0$, entonces U tiene un máx. en $(53, 55)$.

El abarrotero debe vender la marca local y la marca nacional en 53 y 55, respectivamente para maximizar la utilidad.

③ $f(l,k) = 20l + 25k - l^2 - 3k^2$

$2l + 4k = 50.$

Sea $g(l,k) = 2l + 4k - 50$. Consideremos

$F(l,k,\lambda) = 20l + 25k - l^2 - 3k^2 - \lambda(2l + 4k - 50)$

$F_l = 20 - 2l - 2\lambda$

$F_k = 25 - 6k - 4\lambda$

$F_\lambda = -2l - 4k + 50$

Resolvamos

$$\begin{cases} 20 - 2l = 2\lambda & (i) \\ 25 - 6k = 4\lambda & (ii) \\ -2l - 4k + 50 = 0 & (iii) \end{cases}$$

$(i) \div (ii)$: $\dfrac{20-2l}{25-6k} = \dfrac{1}{2}$

$40 - 4l = 25 - 6k \Rightarrow -4l + 6k = -15 \quad (iv)$

De (iii) y (iv), obtenemos

$$\begin{cases} 4l + 8k - 100 = 0 \\ -4l + 6k + 15 = 0 \end{cases}$$

$14k - 85 = 0$

$k = \dfrac{85}{14} \Rightarrow l = \dfrac{90}{7}$

La producción máxima sujeta a la restricción es $f(90/7, 85/14) = \dfrac{3725}{28} \approx 133$