Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201830
Fila B
Septiembre 22 de 2018

Nombre completo:______________________________ Código:______________________________

1. [**10 pts**] Si $w = 3xy^2 + xyz - 4x^2z^3$ donde

$$x = -3r + 2s \quad y = r + 6s \quad z = -r + s$$

determine $\partial w/\partial s$ cuando $r = 1$ y $s = 2$.

---

2. [**20 pts**] El costo total C por serie de producción (en miles de dólares) de cierta industria está dada por

$$C(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - 10xy - 10x + 6y + 20$$

donde x denota el número horas-hombre (en cientos) y y el número de unidades (en miles) del producto elaboradas por serie. ¿Qué valores de x y y darán como resultado el costo total mínimo por serie de producción?

---

3. [**20 pts**] La producción de un artículo viene dada por

$$Q(x, y, z) = 3x + 2y + z$$

donde x, y y z representan las cantidades de cada uno de los tres factores productivos utilizados. La utilidad que obtiene una compañía con la venta del producto es

$$U(x, y, z) = xyz.$$

Encuentre las cantidades de cada factor productivo que maximizan la utilidad de la compañía cuando la producción es de 18 unidades. (Puede suponerse que el punto crítico obtenido corresponde a una producción máxima).

Tiempo máximo: 70 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución Parcial II

fila B

1) $\dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial s}$

- $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 3y^2 + yz - 8xz^3 \qquad \dfrac{\partial x}{\partial s} = 2$
- $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 6xy + xz \qquad \dfrac{\partial y}{\partial s} = 6$
- $\dfrac{\partial w}{\partial z} = xy - 12x^2z^2 \qquad \dfrac{\partial z}{\partial s} = 1$

Cuando $r=1$ y $s=2$, tenemos que

$x=1 \quad y=13 \quad z=1$

y en consecuencia

$\dfrac{\partial w}{\partial x} = 512 \;;\; \dfrac{\partial w}{\partial y} = 79 ;\; \dfrac{\partial w}{\partial z} = 1$

Luego,

$$\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{\substack{r=1\\ s=2}} = 512\cdot 2 + 79\cdot 6 + 1\cdot 1 = 1499$$

2) $C(x,y) = 5x^2 + 6y^2 - 10xy - 10x + 6y + 20$

$\dfrac{\partial C}{\partial x} = 10x - 10y - 10$

$\dfrac{\partial C}{\partial y} = 12y - 10x + 6$

Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} 10x - 10y - 10 = 0 \\ -10x + 12y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$2y - 4 = 0$$

$$y = 2 \Rightarrow x = 3$$

C tiene un punto crítico en $(3,2)$.

$C_{xx} = 10 \quad C_{yy} = 12 \quad C_{xy} = -10$

$\Rightarrow D(3,2) = 10\cdot 12 - (-10)^2 = 20$

Como $D(3,2) > 0$ y $C_{xx}(3,2) > 0$

$\Rightarrow$ C es mínimo cuando $x=3 \wedge y=2$

3) $V(x,y,z) = xyz \;;\; 3x + 2y + z = 18$

Sea

$F(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(3x + 2y + z - 18)$

Resolvamos

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases} \quad \text{esto es} \quad \begin{cases} yz - 3\lambda = 0 \\ xz - 2\lambda = 0 \\ xy - \lambda = 0 \\ -(3x + 2y + z - 18) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz = 3\lambda & (i) \\ xz = 2\lambda & (ii) \\ xy = \lambda & (iii) \\ 3x + 2y + z - 18 = 0 & (iv) \end{cases}$$

$(i) \div (iii)$: $\dfrac{z}{x} = 3 \Rightarrow z = 3x. \quad (v)$

$(ii) \div (iii)$: $\dfrac{z}{y} = 2 \Rightarrow z = 2y \quad (vi)$

Reemplazando (v) y (vi) en (iv), tenemos

$$z + z + z = 18$$
$$3z = 18$$
$$z = 6$$
$$\Downarrow$$
$$x = 2 \wedge y = 3$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201830
Fila A
Septiembre 22 de 2018

Nombre completo:______________________________ Código:______________________________

1. **[10 pts]** Si $w = 3x^2y + xyz - 4y^2z^3$ donde

$$x = 2r - 3s \quad y = 6r + s \quad z = r - s$$

determine $\partial w/\partial r$ cuando $r = 2$ y $s = 1$.

---

2. **[20 pts]** El costo total C por serie de producción (en miles de dólares) de cierta industria está dada por

$$C(x, y) = 6x^2 + 5y^2 - 10xy + 6x - 10y + 20$$

donde x denota el número horas-hombre (en cientos) y y el número de unidades (en miles) del producto elaboradas por serie. ¿Qué valores de x y y darán como resultado el costo total mínimo por serie de producción?

---

3. **[20 pts]** La producción de un artículo viene dada por

$$Q(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

donde x, y y z representan las cantidades de cada uno de los tres factores productivos utilizados. La utilidad que obtiene una compañía con la venta del producto es

$$U(x, y, z) = xyz.$$

Encuentre las cantidades de cada factor productivo que maximizan la utilidad de la compañía cuando la producción es de 36 unidades. (Puede suponerse que el punto crítico obtenido corresponde a una producción máxima).

Tiempo máximo: 70 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución Parcial II

fila A

1) $$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$

- $\frac{\partial w}{\partial x} = 6xy + yz \qquad \frac{\partial x}{\partial r} = 2$
- $\frac{\partial w}{\partial y} = 3x^2 + xz - 8yz^3 \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = 6$
- $\frac{\partial w}{\partial z} = xy - 12y^2z^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = 1$

Cuando $r=2$ y $s=1$, tenemos que

$x=1 \quad y=13 \quad z=1$

y en consecuencia

$\frac{\partial w}{\partial x} = 91$; $\frac{\partial w}{\partial y} = -100$; $\frac{\partial w}{\partial z} = -2015$

Luego,

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{\substack{r=2\\ s=1}} = 91\cdot 2 + (-100)\cdot 6 + (-2015)\cdot 1 = -2433$$

2) $C(x,y) = 6x^2 + 5y^2 - 10xy + 6x - 10y + 20$

$\frac{\partial C}{\partial x} = 12x - 10y + 6$

$\frac{\partial C}{\partial y} = 10y - 10x - 10$

Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} 12x - 10y + 6 = 0 \\ -10x + 10y - 10 = 0 \end{cases}$$

$2x \qquad -4 = 0$

$x = 2 \Rightarrow y = 3$

C tiene un punto crítico en $(2,3)$.

$C_{xx} = 12 \quad C_{yy} = 10 \quad C_{xy} = -10$

$\Rightarrow D(2,3) = 12\cdot 10 - (-10)^2 = 20.$

Como $D(2,3) > 0$ y $C_{xx}(2,3) > 0$.

$\Rightarrow$ C es mínimo cuando $x = 2 \wedge y = 3$

3) $V(x,y,z) = xyz$; $x + 2y + 3z = 36$

Sea

$F(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(x + 2y + 3z - 36)$

Resolvamos

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases} \quad \text{esto es} \quad \begin{cases} yz - \lambda = 0 \\ xz - 2\lambda = 0 \\ xy - 3\lambda = 0 \\ -(x + 2y + 3z - 36) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz = \lambda & (i) \\ xz = 2\lambda & (ii) \\ xy = 3\lambda & (iii) \\ x + 2y + 3z = 36 & (iv) \end{cases}$$

$(i) \div (ii)$: $\frac{y}{x} = 1/2 \Rightarrow 2y = x.$ (v)

$(i) \div (iii)$: $\frac{z}{x} = 1/3 \Rightarrow 3z = x$ (vi)

Reemplazando (v) y (vi) en (iv), tenemos

$x + x + x = 36$

$3x = 36$

$x = 12$

$\Downarrow$

$y = 6 \wedge z = 4.$