UNIVERSIDAD DEL NORTE

Tercer parcial de Cálculo III ANEC 201530 A

Nombre completo: Solucionario

1. Calcule las siguientes integrales:

   (a) $\iint_R xe^{xy}\,dA$, donde R es el rectángulo determinado por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 3$.

   (b) $\iint_R \frac{1}{y^2+1}\,dA$, donde R es el triángulo acotado por las rectas $y = x$, $y = -2x$ y $y = 4$.

---

2. Use una integral doble para hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 2x$ y $y = 4 - x^2$. Grafique la región.

---

3. Dibuje la región de integración para la integral doble dada y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_0^6 \int_{x-4}^{2} f(x,y)\,dy\,dx$$

---

4. En cierta fábrica, la producción Q está relacionada con las entradas x y y por la expresión $Q(x,y) = 400xe^{-y}$. Si $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le x$, encuentre el promedio de producción de la fábrica.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

1)

ⓐ $\displaystyle\int_0^1\left[\int_0^3 xe^{xy}\,dy\right]dx$

$\displaystyle= \int_0^1\left[x\int_0^3 e^{xy}\,dy\right]dx$

$\displaystyle= \int_0^1\left[x\left(\frac{1}{x}e^{xy}\Big|_0^3\right)\right]dx$

$\displaystyle= \int_0^1\left(e^{xy}\Big|_0^3\right)dx$

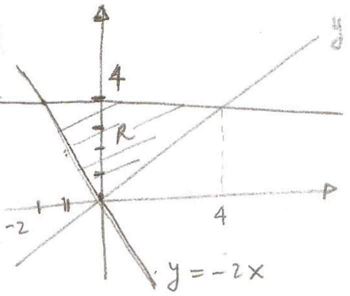
$\displaystyle= \int_0^1\left(e^{3x}-1\right)dx$

$\displaystyle= \left(\frac{1}{3}e^{3x}-x\right)\Big|_0^1$

$\displaystyle= \left(\frac{1}{3}e^{3}-1\right)-\left(\frac{1}{3}-0\right)$

$\displaystyle= \frac{1}{3}e^{3}-\frac{4}{3}$

ⓑ



$\displaystyle\iint_R \frac{1}{y^2+1}\,dA = \int_0^4\left[\int_{-y/2}^{y}\frac{1}{y^2+1}\,dx\right]dy$

$\displaystyle= \int_0^4 \frac{1}{y^2+1}\left(x\Big|_{-y/2}^{y}\right)dy$

$\displaystyle= \int_0^4 \frac{1}{y^2+1}\left(y+y/2\right)dy$

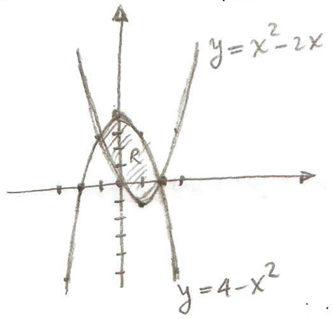
$\displaystyle= \frac{3}{2}\int_0^4 \frac{y}{y^2+1}\,dy$

$\displaystyle= \frac{3}{4}\int_0^4 \frac{2y}{y^2+1}\,dy$

$\displaystyle= \frac{3}{4}\ln(y^2+1)\Big|_0^4$

$\displaystyle= \frac{3}{4}\ln 17$

2) $y = x^2-2x \;\wedge\; y = 4-x^2$



$R = \{(x,y)\mid -1\le x\le 2 \wedge x^2-2x\le y\le 4-x^2\}$

area de R $\displaystyle= \int_{-1}^{2}\left[\int_{x^2-2x}^{4-x^2} dy\right]dx$

$\displaystyle= \int_{-1}^{2}\left(y\Big|_{x^2-2x}^{4-x^2}\right)dx$

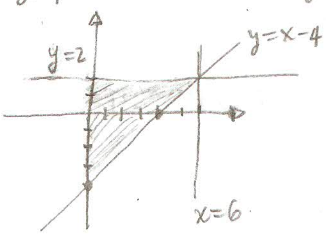
$\displaystyle= \int_{-1}^{2}\left(4-x^2-x^2+2x\right)dx$

$\displaystyle= \int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$

$\displaystyle= \left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right)\Big|_{-1}^{2} = 9$

3) $\displaystyle\int_0^6\int_{x-4}^{2} f(x,y)\,dy\,dx$

$R = \{(x,y)\mid 0\le x\le 6 \wedge x-4\le y\le 2\}$

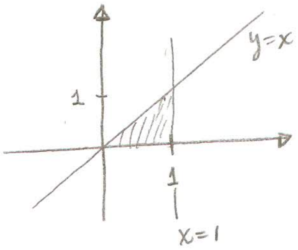


$y = x-4$

$\displaystyle\int_{-4}^{2}\int_0^{y+4} f(x,y)\,dx\,dy$

4) $Q(x,y) = 400xe^{-y}$

$R = \{(x,y)\mid 0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le x\}$.



area de $R = \dfrac{1\cdot 1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\displaystyle\iint_R Q(x,y)\,dA = \int_0^1\left[\int_0^x 400xe^{-y}\,dy\right]dx$

$\displaystyle= \int_0^1\left[400x\int_0^x e^{-y}\,dy\right]dx$

$\displaystyle= \int_0^1\left[400x\left(-e^{-y}\Big|_0^x\right)\right]dx$

$\displaystyle= \int_0^1 400x\left(-e^{-x}+1\right)dx$.

$\displaystyle= -400\int_0^1 xe^{-x}\,dx + 400\int_0^1 x\,dx$

$\displaystyle= -400\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)\Big|_0^1 + 400\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1$

$= -400\left(-2e^{-1}+1\right) + 400\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 200 - 400 + 800e^{-1}$

$= 800e^{-1} - 200$

$\Rightarrow VP = 1600e^{-1} - 400$

$\approx 188{,}607$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Tercer parcial de Cálculo III ANEC 201530 B

Nombre completo: Solucionario

1. Calcule las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\iint_R ye^{xy}\,dA$, donde R es el rectángulo determinado por $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$.

   (b) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{y^2+1}\,dA$, donde R es el triángulo acotado por las rectas $y = 2x$, $y = -x$ y $y = 3$.

---

2. Use una integral doble para hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 4$ y $y = 2x - x^2$. Grafique la región.

---

3. Dibuje la región de integración para la integral doble dada y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_0^6 \int_{y-4}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$$

---

4. En cierta fábrica, la producción Q está relacionada con las entradas x y y por la expresión $Q(x,y) = 400ye^{-x}$. Si $y \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$, encuentre el promedio de producción de la fábrica.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

B

1)

a) $\int_0^3\left[\int_0^2 ye^{xy}\,dx\right]dy$

$=\int_0^3\left[y\int_0^2 e^{xy}\,dx\right]dy$

$=\int_0^3\left[y\left(\frac{1}{y}e^{xy}\right)\Big|_0^2\right]dy$

$=\int_0^3\left(e^{xy}\Big|_0^2\right)dy$

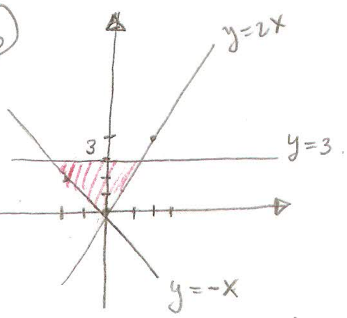
$=\int_0^3\left(e^{2y}-1\right)dy$

$=\left(\frac{1}{2}e^{2y}-y\right)\Big|_0^3$

$=\left(\frac{1}{2}e^{6}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-0\right)$

$=\frac{1}{2}e^{6}-\frac{7}{2}$.

b)



$\iint_R \frac{1}{y^2+1}\,dA=\int_0^3\left[\int_{-y}^{y/2}\frac{1}{y^2+1}\,dx\right]dy$

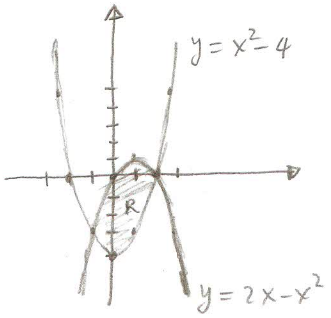
$=\int_0^3\frac{1}{y^2+1}\left(x\Big|_{-y}^{y/2}\right)dy$

$=\int_0^3\frac{1}{y^2+1}\left(y/2+y\right)dy$

$=\frac{3}{2}\int_0^3\frac{y}{y^2+1}\,dy=\frac{3}{4}\int_0^3\frac{2y}{y^2+1}\,dy$

$=\frac{3}{4}\ln(y^2+1)\Big|_0^3=\frac{3}{4}\ln 10$

2) $y=x^2-4 \wedge y=2x-x^2$.



$R=\{(x,y)\mid -1\le x\le 2 \wedge x^2-4\le y\le 2x-x^2\}$

área de $R=\int_{-1}^{2}\left[\int_{x^2-4}^{2x-x^2}dy\right]dx$

$=\int_{-1}^{2}\left(y\Big|_{x^2-4}^{2x-x^2}\right)dx$

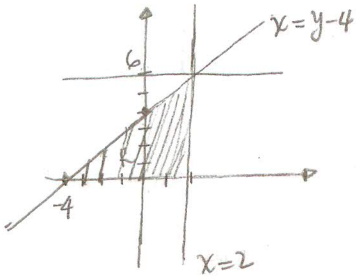
$=\int_{-1}^{2}\left(2x-x^2-x^2+4\right)dx$

$=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$

$=\left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right)\Big|_{-1}^{2}=9$

3) $\int_0^6\int_{y-4}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$

$R=\{(x,y)\mid y-4\le x\le 2 \wedge 0\le y\le 6\}$

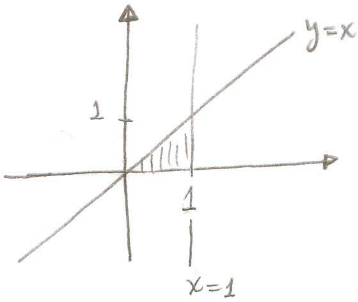


$\int_{-4}^{2}\int_{0}^{x+4} f(x,y)\,dy\,dx$

4)

$Q(x,y)=400ye^{-x}$

$R=\{(x,y)\mid y\le x\le 1 \wedge 0\le y\le 1\}$



area de $R=\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}$

$\iint_R Q(x,y)\,dA=\int_0^1\left[\int_y^1 400ye^{-x}\,dx\right]dy$

$=\int_0^1\left[400y\int_y^1 e^{-x}\,dx\right]dy$

$=\int_0^1\left[400y\left(-e^{-x}\Big|_y^1\right)\right]dy$

$=\int_0^1 400y\left(-e^{-1}+e^{-y}\right)dy$

$=-400e^{-1}\int_0^1 y\,dy+400\int_0^1 ye^{-y}\,dy$

$=-400e^{-1}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right)+400\left(-ye^{-y}-e^{-y}\right)\Big|_0^1$

$=-400e^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+400\left(-2e^{-1}+1\right)$

$=-200e^{-1}-800e^{-1}+400$

$\Rightarrow VP=800-2000e^{-1}$

$\approx 64{,}24$