UNIVERSIDAD DEL NORTE

UNIVERSIDAD DEL NORTE
INTERSEMESTRAL
TERCER PARCIAL DE CÁLCULO III (ANEC)
JULIO 5 DE 2016

Nombre: Solucionario

1. Evalúe la integral doble $\displaystyle\iint_R e^{y^3}\, dA$, donde R es la región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 1$ y $x = 0$.

2. Trace la región de integración para la integral dada y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dydx.$$

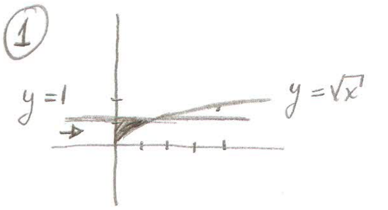
3. Use una integral doble para hallar el área de la región R que se encuentra en el primer cuadrante acotada por $y = 4 - x^2$, $y = 3x$ y $y = 0$.

4. Un fabricante estima que cuando se venden x unidades de cierto artículo en el país, y y unidades en mercados extranjeros, la utilidad está dada por

$$P(x,y) = (x-30)(70+5x-4y) + (y-40)(80-6x+7y)$$

cientos de dólares. Si las ventas nacionales varían entre 100 y 125 unidades y las ventas en el extranjero entre 70 y 89 unidades, ¿cuál es la utilidad mensual promedio?

(1)



$R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le y^2 \wedge 0 \le y \le 1\}$

$$\iint_R e^{y^3} dA = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3} dx\,dy$$

$$= \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy$$

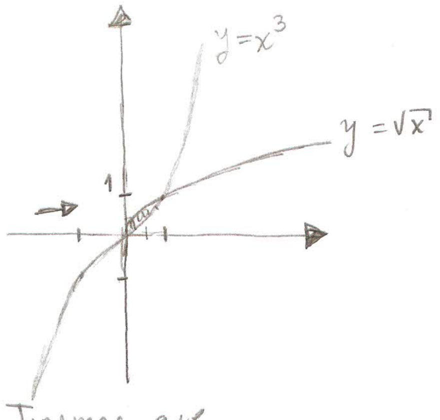
Sea $u = y^3 \Rightarrow \frac{du}{3} = y^2 dy$

si $y \to 1 \Rightarrow u \to 1$

si $y \to 0 \Rightarrow u \to 0$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 e^u du = \frac{1}{3}\left(e^u\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e-1)$$

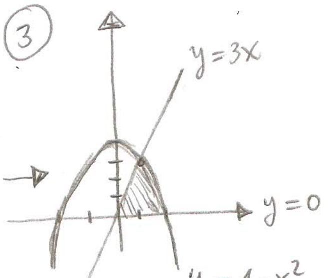
(2) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$



Tenemos que

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

(3)



$$a(R) = \int_0^3 \int_{y/3}^{\sqrt{4-y}} dx\,dy$$

$$= \int_0^3 \left(\sqrt{4-y} - y/3\right) dy$$

$$= \underbrace{\int_0^3 \sqrt{4-y}\,dy}_{I_1} - \frac{1}{3}\underbrace{\int_0^3 y\,dy}_{I_2}$$

Para I_1, Sea $u := 4-y \Rightarrow -du = dy$

si $y \to 3 \Rightarrow u \to 1$

si $y \to 0 \Rightarrow u \to 4$

$$I_1 = -\int_4^1 u^{1/2} du = \left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\left(4^{3/2} - 1^{3/2}\right)$$

$$= \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

$$I_2 = \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}$$

Entonces

$$a(R) = \frac{14}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2} = \frac{14}{3} - \frac{3}{2} = \frac{28-9}{6} = \frac{19}{6}$$

(4)

$$VP(f) = \frac{1}{475}\int_{100}^{125}\int_{70}^{89} \left[(x-30)(70+5x-4y) + (y-40)(80-6x+7y)\right] dy\,dx$$

$$= \$\,24896{,}50$$