UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Tercer parcial de Cálculo III ANEC 201630
Fila A
October 21, 2016

Nombre completo: Solucionario Código:

1. Calcule la integral doble $\iint_R x^2 e^{xy}\, dA$, donde R es la región acotada por $y = x$, $y = 0$ y $x = 1$.

---

2. Para la integral doble $\int_0^1 \int_{2/(x+1)}^{x} f(x, y)\, dy\, dx$:

   (a) Dibuje la región de integración.

   (b) Escriba la integral dada como una integral equivalente con el orden de integración invertido.

---

3. Una región R en el plano xy, está limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = 4x$. Grafique la región R y use una integral doble para calcular el área de R.

---

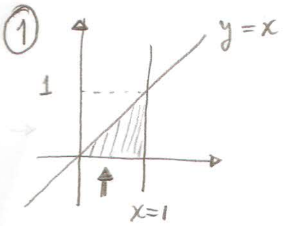
4. Encuentre el valor promedio de la función $f(x, y) = 400ye^{-x}$ sobre la región

$$R: \quad 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

①



$$\iint_R x^2 e^{xy}\, dA = \int_0^1 \int_0^x x^2 e^{xy}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 x^2\left(\frac{1}{x} e^{xy}\right)\Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^1 x\,(e^{x^2} - 1)\,dx$$

$$= \int_0^1 (xe^{x^2} - x)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1$$

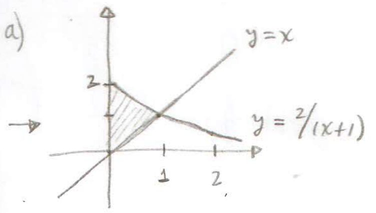
$$= \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}e - 1 \approx 0{,}36$$

② El planteamiento correcto es

$$I := \int_0^1 \int_x^{2/(x+1)} f(x,y)\, dy\, dx$$

a)



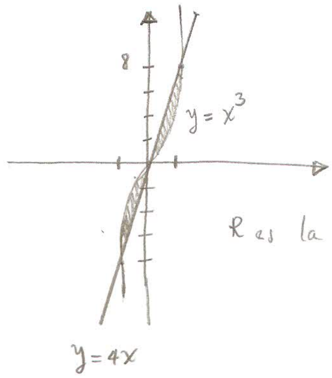
b)

$$I = \int_0^1 \int_0^y f(x,y)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{-1+2/y} f(x,y)\, dx\, dy$$

③ puntos de corte

$$x^3 = 4x$$

$$x(x-2)(x+2) = 0.$$



R es la parte sombreada.

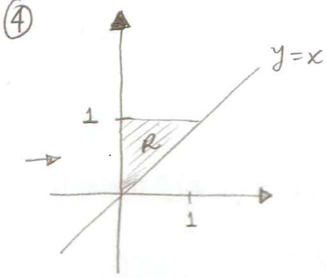
A

$$a(R) = 2\int_0^2 \int_{x^3}^{4x} dy\, dx$$

$$= 2\int_0^2 (4x - x^3)\, dx = 2\left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2$$

$$= 2(8-4) = 8.$$

④



$$a(R) = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\iint_R 400\, y e^{-x}\, dA = 400 \int_0^1 \int_0^y y e^{-x}\, dx\, dy$$

$$= 400 \int_0^1 y\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^y dy$$

$$= 400 \int_0^1 y\left(-e^{-y} + 1\right) dy$$

$$= 400 \int_0^1 \left(-y e^{-y} + y\right) dy$$

$$= 400\left(e^{-y} + y e^{-y} + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= 400\left(e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2} - 1\right) = 400\left(2e^{-1} - 1/2\right)$$

$\int -y e^{-y}\, dy$

Sea $u := -y$ $\quad -du = dy$

$-\int u e^u\, du$

$= -(ue^u - e^u) + C$

$= e^u - ue^u + C$

$= e^{-y} + y e^{-y} + C$

$$\Longrightarrow VP_R(f) = \frac{1}{1/2} \cdot 400\left(2e^{-1} - 1/2\right)$$

$$= 800\left(2e^{-1} - 1/2\right)$$

$$\approx 188{,}607$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Tercer parcial de Cálculo III ANEC 201630
Fila B
October 21, 2016

Nombre completo: Solucionario Código:

1. Calcule la integral doble $\iint_R y^2 e^{xy}\, dA$, donde R es la región acotada por $y = x$, $x = 0$ y $y = 1$.

---

2. Para la integral doble $\int_0^1 \int_0^{e^y} f(x, y)\, dx\, dy$:

   (a) Dibuje la región de integración.

   (b) Escriba la integral dada como una integral equivalente con el orden de integración invertido.

---

3. Una región R en el plano xy, está limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = 9x$. Grafique la región R y use una integral doble para calcular el área de R.

---

4. Encuentre el valor promedio de la función $f(x, y) = 200xe^{-y}$ sobre la región

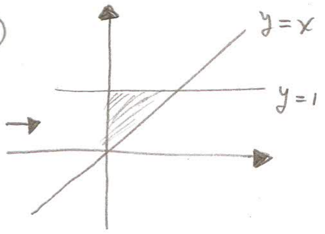
$$R: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x.$$

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

B

(1)



$$\iint_R y^2 e^{xy}\,dA = \int_0^1\int_0^y y^2 e^{xy}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 y^2\left(\frac{1}{y}e^{xy}\right)\Big|_0^y dy$$

$$= \int_0^1 y\left(e^{y^2}-1\right)dy$$

$$= \int_0^1 \left(ye^{y^2}-y\right)dy$$

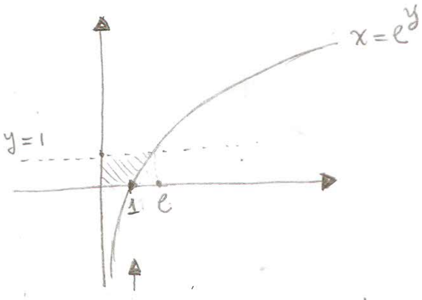
$$= \left(\frac{1}{2}e^{y^2}-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-0\right)$$

$$= \frac{1}{2}e-1$$

(2)

$$I := \int_0^1\int_0^{e^y} f(x,y)\,dx\,dy$$

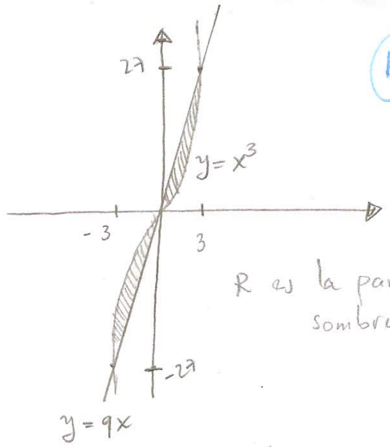


$$I = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^e\int_{\ln x}^1 f(x,y)\,dy\,dx$$

(3) Puntos de corte

$$x^3 = 9x$$

$$x(x-3)(x+3)=0$$



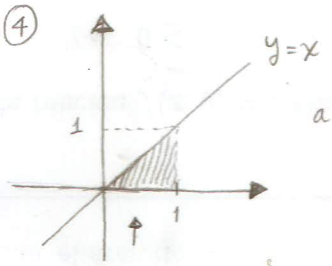
R es la parte sombreada.

$$a(R) = 2\int_0^3\int_{x^3}^{9x} dy\,dx$$

$$= 2\int_0^3 (9x-x^3)\,dx = 2\left(\frac{9}{2}x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^3$$

$$= 2\left(\frac{81}{2}-\frac{81}{4}\right) = \frac{81}{2}$$

(4)



$$a(R) = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\iint_R 200\,x\,e^{-y}\,dA = 200\int_0^1\int_0^x x e^{-y}\,dy\,dx$$

$$= 200\int_0^1 x\left(-e^{-y}\right)\Big|_0^x dx$$

$$= 200\int_0^1 x\left(-e^{-x}+1\right)dx$$

$$= 200\int_0^1 \left(-xe^{-x}+x\right)dx$$

$$= 200\left(e^{-x}+xe^{-x}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= 200\left(e^{-1}+e^{-1}+\frac{1}{2}-1\right) = 200\left(2e^{-1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\int -xe^{-x}\,dx$$

Sea $u := -x$ $\quad -du = dx$

$$-\int ue^{u}\,du$$

$$= -\left(ue^{u}-e^{u}\right)+C$$

$$e^{u}-ue^{u}+C$$

$$= e^{-x}+xe^{-x}+C$$

$$\Rightarrow VP_R(f) = \frac{1}{1/2}\cdot 200\left(2e^{-1}-1/2\right)$$

$$= 400\left(2e^{-1}-1/2\right) \simeq 94,3$$