Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202310
Fila A
Mayo 29 de 2023

Nombre completo:________________________ Código:________________________

1. **[8 pts]** Conteste falso (F) o verdadero (V) según el caso. Justifique claramente su respuesta.
   (a) [2 pts] La ecuación $x\frac{dy}{dx} = e^{xy}$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden . . . . ( )
   (b) [2 pts] La ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + xe^{y}$ es una ecuación de variables separables . . . . ( )
   (c) [2 pts] La ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 5xy$ es de orden 3 . . . . ( )
   (d) [2 pts] La función $y = \frac{1}{16}x^4$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$ . . . . ( )

---

2. **[10 pts]** Verifique que la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{(x^2y + y)\sqrt{y-1}}$$

es *separable* y luego determine la solución particular que satisface la condición $y = 2$ cuando $x = 0$.

---

3. **[20 pts]** Gustavo planea abrir un restaurante después de su pregrado, el cual será dentro de tres años, él estima que necesitará 250 000 € para este proyecto. Un socio capitalista realiza un depósito inicial de K euros en una cuenta de ahorros que gana 5% de interés anual, capitalizado continuamente. Gustavo planea sumar a esta cantidad 30 000 € por año.
   (a) [15 pts] Plantee y resuelva una ecuación diferencial para determinar el saldo $S(t)$ de la cuenta de ahorros después de t años.
   (b) [5 pts] Encuentre el valor de la inversión K del socio capitalista.

---

4. **[12 pts]** Resuelva la ecuación diferencial

$$(2xy^2 - 3y^3)dx + \left(7 - 3xy^2\right)dy = 0.$$

   (a) [2 pts] Demuestre que la ED no es exacta.
   (b) [4 pts] Verifique que un factor integrante para la ED es $\mu(y) = 1/y^2$.
   (c) [6 pts] Determine la solución general de la ED.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila A

①

a) la ecuación $x\frac{dy}{dx} = e^{xy}$ no puede ser expresada de la forma $a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = f(x)$. $\boxed{F}$

b) Factorizando el lado derecho de la ED, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{y} + e^{y}\right) \quad \boxed{V}$$

c) la derivada de mayor orden en la ED es $\frac{d^2y}{dx^2}$ y por tanto su orden es 2. $\boxed{F}$

d) Si $y = \frac{1}{16}x^4$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^3$. Por otra parte,

$$x\sqrt{y} = x\sqrt{\frac{1}{16}x^4} = x \cdot \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^3 \quad \boxed{V}$$

②

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{(x^2y+y)\sqrt{y-1}}$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{(x^2+1)y\sqrt{y-1}}$$

y por tanto

$$\underbrace{\int y\sqrt{y-1}\,dy}_{I_1} = \underbrace{\int \frac{2x}{x^2+1}dx}_{I_2} \quad (*)$$

• $I_1 = \frac{2}{5}(y-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(y-1)^{3/2} + C_1$

• $I_2 = \ln(x^2+1) + C_2$

Reemplazando en $(*)$:

$$\frac{2}{5}(y-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(y-1)^{3/2} = \ln(x^2+1) + C.$$

la solución particular que satisface la condición $y(0)=2$ es

$$\frac{2}{5}(y-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(y-1)^{3/2} = \ln(x^2+1) + \frac{16}{15}.$$

③ Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta de ahorros después de t años, entonces

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}05S + 30\,000 \;;\; S(3) = 250\,000 \;\wedge\; S(0) = K$$

la solución general de la ED está dada por

$$S(t) = -600\,000 + Ce^{0{,}05t}$$

Usando la condición $S(3) = 250000$, obtenemos

$$C = 850000\,e^{-0{,}15}.$$

Por tanto,

$$S(t) = -600\,000 + 850\,000\,e^{-0{,}15+0{,}05t}.$$

Luego,

$$K = S(0)$$
$$= -600000 + 850000\,e^{-0{,}15} \approx 131601{,}78$$

④ $\underbrace{(2xy^2-3y^3)}_{M}dx + \underbrace{(7-3xy^2)}_{N}dy = 0$

a) $M_y = 4xy - 9y^2 \;\wedge\; N_x = -3y^2$

b) $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{6y^2-4xy}{2xy^2-3y^3} = \frac{2y(3y-2x)}{y^2(2x-3y)} = -\frac{2}{y}$

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = y^{-2}.$$

c) Multiplicando la ED por $\mu(y) = y^{-2}$,

$$\underbrace{(2x-3y)}_{M^*}dx + \underbrace{(7y^{-2}-3x)}_{N^*}dy = 0 \quad (**)$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial y} = -3 \;\wedge\; \frac{\partial N^*}{\partial x} = -3$$

la ED $(**)$ es exacta y su solución general está dada por

$$x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = C.$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202310
Fila B
Mayo 29 de 2023

Nombre completo:________________________Código:________________________

1. **[8 pts]** Conteste falso (F) o verdadero (V) según el caso. Justifique claramente su respuesta.

   (a) [2 pts] La función $y = 3\ln x - \ln 3$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x^2 e^{-y}$ ....( )

   (b) [2 pts] La ecuación diferencial $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + e^{3x} = 0$ es de orden 2 .... ( )

   (c) [2 pts] La ecuación $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + \frac{1}{e^y}$ es una ecuación de variables separables................. ( )

   (d) [2 pts] La ecuación $x^2\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden......... ( )

---

2. **[10 pts]** Verifique que la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{(2ye^x - y)\sqrt{y+1}}$$

   es *separable* y luego determine la solución particular que satisface la condición $y = 0$ cuando $x = 0$.

---

3. **[20 pts]** Roxana planea abrir un restaurante después de su pregrado, el cual será dentro de cuatro años, ella estima que necesitará 200 000 € para este proyecto. Una socia capitalista realiza un depósito inicial de K euros en una cuenta de ahorros que gana 4% de interés anual, capitalizado continuamente. Roxana planea sumar a esta cantidad 36 000 € por año.

   (a) [15 pts] Plantee y resuelva una ecuación diferencial para determinar el saldo $S(t)$ de la cuenta de ahorros después de t años.

   (b) [5 pts] Encuentre el valor de la inversión K de la socia capitalista.

---

4. **[12 pts]** Resuelva la ecuación diferencial

$$(7 - 3x^2y)dx + \left(2x^2y - 3x^3\right)dy = 0.$$

   (a) [2 pts] Demuestre que la ED no es exacta.

   (b) [4 pts] Verifique que un factor integrante para la ED es $\mu(x) = 1/x^2$.

   (c) [6 pts] Determine la solución general de la ED.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila B

1

a) Si $y=3\ln x-\ln 3$, entonces $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{x}$. Por otra parte,

$$x^2e^{-y}=x^2e^{-3\ln x+\ln 3}=x^2\cdot x^{-3}\cdot 3=3x^{-1}\quad \boxed{V}$$

b) La derivada de mayor en la ED es $\dfrac{dy}{dx}$ y por tanto su orden es 1. $\boxed{F}$

c) Factorizando el lado derecho de la ED, tenemos

$$\frac{dy}{dx}=e^x\cdot e^{-y}+e^{-y}=(e^x+1)e^{-y}\quad \boxed{V}$$

d) La ecuación $x^2\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{xy}$ no puede ser expresada de la forma

$$a_0(x)\frac{dy}{dx}+a_1(x)y=f(x).\quad \boxed{F}$$

2 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2e^x}{(2ye^x-y)\sqrt{y+1}}$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2e^x}{(2e^x-1)y\sqrt{y+1}}$$

Y por tanto,

$$\underbrace{\int y\sqrt{y+1}\,dy}_{I_1}=\underbrace{\int\frac{2e^x}{2e^x-1}\,dx}_{I_2}\qquad (*)$$

- $I_1=\frac{2}{5}(y+1)^{5/2}-\frac{2}{3}(y+1)^{3/2}+C_1$
- $I_2=\ln(2e^x-1)+C_2$

Reemplazando en $(*)$:

$$\frac{2}{5}(y+1)^{5/2}-\frac{2}{3}(y+1)^{3/2}=\ln(2e^x-1)+C$$

La solución particular que satisface la condición $y(0)=0$ es

$$\frac{2}{5}(y+1)^{5/2}-\frac{2}{3}(y+1)^{3/2}=\ln(2e^x-1)-\frac{4}{15}$$

3 Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta de ahorros después de t años, entonces

$$\frac{dS}{dt}=0{,}04S+36000;\quad S(4)=200000\ \wedge\ S(0)=K.$$

La solución general de la ED está dada por

$$S(t)=-900000+Ce^{0{,}04t}$$

Usando la condición $S(4)=200000$, obtenemos

$$C=1'100.000\,e^{-0{,}16}$$

Por tanto,

$$S(t)=-900000+1'100.000\,e^{-0{,}16+0{,}04t}$$

Luego,

$$K=S(0)$$
$$=-900000+1'100.000\,e^{-0{,}16}\approx 37.358,17$$

4 $\underbrace{(7-3x^2y)}_{M}dx+\underbrace{(2x^2y-3x^3)}_{N}dy=0$

a) $M_y=-3x^2\ \wedge\ N_x=4xy-9x^2$

b) $\dfrac{M_y-N_x}{N}=\dfrac{6x^2-4xy}{2x^2y-3x^3}=\dfrac{2x(3x-2y)}{x^2(2y-3x)}=-\dfrac{2}{x}$

$$\Rightarrow \mu(x)=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=x^{-2}$$

c) Multiplicando la ED por $\mu(x)=x^{-2}$,

$$\underbrace{(7x^{-2}-3y)}_{M^*}dx+\underbrace{(2y-3x)}_{N^*}dy=0\qquad (**)$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial y}=-3\ \wedge\ \frac{\partial N^*}{\partial x}=-3$$

La ED $(**)$ es exacta y su solución general está dada por

$$y^2-3xy-\frac{7}{x}=C.$$