2015-2

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Examen final de Cálculo III ANEC 201530 B

Nombre completo: Solucionario

1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\left(3x^2 + y^3e^y\right)dx + \left(3xy^2e^y + xy^3e^y + 3y^2\right)dy = 0$$

---

2. Verifique que la función $y = C_1e^x + C_2e^{4x}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 4y = 0,$$

donde C_1 y C_2 son constantes.

---

3. Elena deposita \$ 20.000 en una cuenta en la que se acumula interés a una tasa de 8 % anual capitalizado continuamente. Ella planea retirar \$ 4.000 por año.

   (a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para determinar el saldo $Q(t)$ de la cuenta t años después del depósito inicial.

   (b) ¿Cuánto tardará la cuenta en agotarse?

---

4. María tiene invertidos actualmente \$ 60.000 en una cuenta de ahorros que gana 4 % anual capitalizado continuamente. Las condiciones del mercado están mejorando y ella decide transferir continuamente 25 % de su cuenta de ahorros a un fondo de acciones que gana 12 % anual. ¿Cuánto habrá en cada cuenta dentro de cuatro años?.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

1) ECUACIÓN EXACTA VISTO EN CLASE

$$\underbrace{(3x^2+y^3e^y)}_{M}dx+\underbrace{(3xy^2e^y+xy^3e^y+3y^2)}_{N}dy=0.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3y^2e^y+y^3e^y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=3y^2e^y+y^3e^y$$

la ecuación es exacta

Entonces existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}=N$$

siendo

$$f(x,y)=C$$

la solución general de la ecuación dada.

Dado que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M$$

entonces

$$f(x,y)=\int(3x^2+y^3e^y)dx+g(y)$$

$$=x^3+xy^3e^y+g(y)$$

Por tanto,

$$\cancel{3xy^2e^y}+\cancel{xy^3e^y}+3y^2=N=\frac{\partial f}{\partial y}=\cancel{3xy^2e^y}+\cancel{xy^3e^y}+g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y)=3y^2 \Rightarrow g(y)=y^3+C$$

La solución general de la ecuación es:

$$x^3+xy^3e^y+y^3=C.$$

2) VERIFICACIÓN DE UNA SOLUCIÓN VISTO EN CLASE

Si $y=C_1e^x+C_2e^{4x}$, entonces

$$\frac{dy}{dx}=C_1e^x+4C_2e^{4x}$$

y,

$$\frac{d^2y}{dx}=C_1e^x+16C_2e^{4x}.$$

En consecuencia,

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+4y$$

$$=C_1e^x+16C_2e^{4x}-5(C_1e^x+4C_2e^{4x})+4(C_1e^x+C_2e^{4x})$$

$$=\cancel{C_1e^x}+\cancel{16C_2e^{4x}}-\cancel{5C_1e^x}-\cancel{20C_2e^{4x}}+\cancel{4C_1e^x}+\cancel{4C_2e^{4x}}$$

$$=0.$$

PROBLEMA VISTO EN CLASE

3) Sea $Q(t)$ el saldo de la cuenta cuando han transcurrido t años. Entonces

(a) $$\frac{dQ}{dt}-0{,}08Q=-4000$$

$$P(t)=-0{,}08 \quad \wedge \quad q(t)=-4000$$

$$\Rightarrow \int p(t)dt=\int -0{,}08dt=-0{,}08t+C_1$$

Entonces

$$Q(t)=e^{0{,}08t}\left[\int e^{-0{,}08t}\cdot(-4000)dt+C\right]$$

$$=e^{0{,}08t}\left[-4000\int e^{-0{,}08t}dt+C\right]$$

$$=e^{0{,}08t}\left[-4000\cdot\frac{1}{-0{,}08}\cdot e^{-0{,}08t}+C\right]$$

$$=e^{0{,}08t}\left[50000e^{-0{,}08t}+C\right].$$

Como $Q(0)=20000$, tenemos que

$$20000=Q(0)=50000+C$$

$$C=-30000$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow Q(t) = e^{0{,}08t}\left[50000e^{-0{,}08t} - 30000\right]$$

Entonces

$$Q(t) = 50000 - 30000e^{0{,}08t}$$

(b) La cuenta se agota cuando

$$Q(t) = 0$$

esto es,

$$50000 - 30000e^{0{,}08t} = 0$$

$$50000 = 30000e^{0{,}08t}$$

$$e^{0{,}08t} = \frac{50000}{30000}$$

$$e^{0{,}08t} = 5/3$$

$$t = \frac{\ln 5/3}{0{,}08} \approx 6{,}38$$

En consecuencia, la cuenta tarda en agotarse aproximadamente 6,38 años.

4) Sea $A(t)$ el valor de la cuenta de ahorros después de t años y $F(t)$ el valor en el fondo de acciones. Entonces

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}04A - 0{,}25A = -0{,}21A \quad (*)$$

Y,

$$\frac{dF}{dt} = 0{,}12F + 0{,}25\cdot A. \quad (**)$$

Dado que

$$\frac{dA}{dt} = -0{,}21A$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{A} = -0{,}21dt$$

$$\ln A = -0{,}21t + c$$

$$A(t) = ke^{-0{,}21t}$$

Como $A(0) = 60000$, entonces

$$60000 = ke^{-0{,}21\cdot 0} \Rightarrow k = 60000$$

$$\Rightarrow A(t) = 60000e^{-0{,}21t}$$

Reemplazando en (**) tenemos:

$$\frac{dF}{dt} - 0{,}12F = 15000e^{-0{,}21t}$$

Aquí,

$$p(t) = -0{,}12 \quad \wedge \quad q(t) = 15000e^{-0{,}21t}$$

Entonces

$$F(t) = e^{0{,}12t}\left[\int e^{-0{,}12t}\cdot 15000e^{-0{,}21t}dt + c\right]$$

$$= e^{0{,}12t}\left[15000\int e^{-0{,}33t}dt + c\right]$$

$$= e^{0{,}12t}\left[\frac{15000}{-0{,}33}\cdot e^{-0{,}33t} + c\right]$$

$$= \frac{-15000}{0{,}33}e^{-0{,}21t} + ce^{0{,}12t}$$

Como $F(0) = 0$, entonces

$$0 = F(0) = \frac{-15000}{0{,}33}e^{-0{,}21\cdot 0} + c\cdot e^{0{,}12\cdot 0}$$

$$C = \frac{15000}{0{,}33}$$

$$\Rightarrow F(t) = \frac{15000}{0{,}33}\left(-e^{-0{,}21t} + e^{0{,}12t}\right)$$

Cuando $t = 4$ (años), tenemos:

$$A(4) = 25902{,}63 \quad \wedge \quad F(4) = 53834{,}72$$

2015-2

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Examen final de Cálculo III ANEC 201530 A

Nombre completo: Solucionario.

1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\left(2xe^{xy} + x^2ye^{xy}\right)dx + \left(x^3e^{xy} + 3y^2\right)dy = 0$$

---

2. Verifique que la función $y = C_1e^x + C_2xe^x$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

donde C_1 y C_2 son constantes.

---

3. Luisa deposita \$ 30.000 en una cuenta en la que se acumula interés a una tasa de 8 % anual capitalizado continuamente. Ella planea retirar \$ 3.200 por año.

   (a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para determinar el salto $Q(t)$ de la cuenta, t años después del depósito inicial.

   (b) ¿Cuánto tardará la cuenta en agotarse?

---

4. Ana tiene invertidos actualmente \$ 50.000 en una cuenta de ahorros que gana 3 % anual capitalizado continuamente. Las condiciones del mercado están mejorando y ella decide transferir continuamente 20 % de su cuenta de ahorros a un fondo de acciones que gana 15 % anual. ¿Cuánto habrá en cada cuenta dentro de cuatro años?

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

1) ECUACIÓN EXACTA VISTO EN CLASE

$$\underbrace{(2xe^{xy}+x^2ye^{xy})}_{M}dx+\underbrace{(x^3e^{xy}+3y^2)}_{N}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x^2e^{xy}+x^2e^{xy}+x^3ye^{xy}$$
$$=3x^2e^{xy}+x^3ye^{xy}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=3x^2e^{xy}+x^3ye^{xy}$$

la ecuación es exacta

Entonces existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M \wedge \frac{\partial f}{\partial y}=N$$

Siendo

$$f(x,y)=C$$

la solución general de la ecuación dada.

Dado que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M$$

entonces

$$f(x,y)=\int(2xe^{xy}+x^2y\,e^{xy})dx+g(y)$$

$$=2\int xe^{xy}dx+y\int x^2e^{xy}dx+g(y)$$

$$=2\left[\frac{e^{xy}}{y^2}\left(xy-1\right)\right]+y\left[e^{xy}\left(\frac{x^2}{y}-\frac{2x}{y^2}+\frac{2}{y^3}\right)\right]+g(y)$$

$$=\cancel{\frac{2x}{y}e^{xy}}-\cancel{\frac{2}{y^2}e^{xy}}+x^2e^{xy}-\cancel{\frac{2x}{y}e^{xy}}+\cancel{\frac{2}{y^2}e^{xy}}+g(y)$$

$$=x^2e^{xy}+g(y).$$

$$\rightarrow f(x,y)=x^2e^{xy}+g(y)$$

Por tanto,

$$\cancel{x^3e^{xy}}+3y^2=N=\frac{\partial f}{\partial y}=\cancel{x^3e^{xy}}+g'(y)$$

$$g'(y)=3y^2$$

$$g(y)=y^3+C$$

la solución general de la ecuación es:

$$x^2e^{xy}+y^3=C$$

2) VERIFICACIÓN DE UNA SOLUCIÓN VISTO EN CLASE

Si $y=c_1e^x+c_2xe^x$, entonces

$$\frac{dy}{dx}=c_1e^x+c_2e^x+c_2xe^x$$

y,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=c_1e^x+c_2e^x+c_2e^x+c_2xe^x=c_1e^x+2c_2e^x+c_2xe^x$$

En consecuencia,

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y$$

$$=\cancel{c_1e^x}+\cancel{2c_2e^x}+\cancel{c_2xe^x}-\cancel{2c_1e^x}-\cancel{2c_2e^x}-\cancel{2c_2xe^x}$$
$$+\cancel{c_1e^x}+\cancel{c_2xe^x}=0$$

3) PROBLEMA. VISTO EN CLASE

Sea $Q(t)$ el saldo de la cuenta cuando han transcurrido t años. Entonces

ⓐ $$\frac{dQ}{dt}-0{,}08Q=-3200$$

$$P(t)=-0{,}08 \wedge q(t)=-3200$$

Entonces

$\int p(t) = \int -0{,}08\,dt = -0{,}08\,t + c_1$

$\Rightarrow Q(t) = e^{0{,}08t}\left[\int e^{-0{,}08t} \cdot (-3200)\,dt + C\right]$

$= e^{0{,}08t}\left[-3200 \int e^{-0{,}08t}\,dt + C\right]$

$= e^{0{,}08t}\left[-3200 \cdot \frac{1}{-0{,}08} e^{-0{,}08t} + C\right]$

$= e^{0{,}08t}\left[40000\, e^{-0{,}08t} + C\right]$

Como $Q(0) = 30000$, tenemos que

$30000 = Q(0) = 40000 + C$

$C = -10000$

$\Rightarrow Q(t) = e^{0{,}08t}\left[40000 e^{-0{,}08t} - 10000\right]$

Entonces

$Q(t) = 40000 - 10000\, e^{0{,}08t}$

(b) La cuenta se agota cuando

$Q(t) = 0$

esto es,

$40000 - 10000\, e^{0{,}08t} = 0$

$e^{0{,}08t} = \frac{40000}{10000}$

$e^{0{,}08t} = 4$

$t = \frac{\ln 4}{0{,}08} \approx 17{,}32$

En consecuencia, la cuenta tarda en agotarse aproximadamente 17,33 años.

4) PROBLEMA

Sea $A(t)$ el valor de la cuenta de ahorros después de t años y $F(t)$ el valor en el fondo de acciones. Entonces

$\frac{dA}{dt} = 0{,}03A - 0{,}2A = -0{,}17A \quad (*)$

y,

$\frac{dF}{dt} = 0{,}15F + 0{,}2A \quad (**)$

Dado que $\frac{dA}{dt} = -0{,}17A$

$\Rightarrow A(t) = k e^{-0{,}17t}$

Como $A(0) = 50000$, entonces

$50000 = A(0) = k \cdot e^{-0{,}17 \cdot 0} = k$

$\rightarrow A(t) = 50000\, e^{-0{,}17t}$

Reemplazando en $(**)$

$\frac{dF}{dt} - 0{,}15F = 10000\, e^{-0{,}17t}$

Entonces

$F(t) = e^{0{,}15t}\left[\int e^{-0{,}15t} \cdot 10000\, e^{-0{,}17t}\,dt + C\right]$

$= e^{0{,}15t}\left[\frac{10000}{-0{,}32} e^{-0{,}32t} + C\right]$

$\Rightarrow F(t) = -31250\, e^{-0{,}17t} + C e^{0{,}15t}$

Como $F(0) = 0$, entonces $C = 31250$. Así,

$F(t) = 31250\left(-e^{-0{,}17t} + e^{0{,}15t}\right)$

Cuando $t = 4$ (años), tenemos

$A(4) = 25330{,}85 \ \wedge \ F(4) = 41109{,}43.$