UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Examen final de Cálculo III ANEC 201610
FILA B
June 1, 2016

Nombre completo: Pablo Durán Código

1. (a) Verifique que la función $y = C_1e^x + C_2xe^x$ es solución de la ecuación diferencial
$$y'' - 2y' + y = 0.$$
(b) Halle la solución general de la ecuación diferencial de variables separables
$$\frac{dy}{dx} = xe^{2x-y}.$$

2. (a) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden
$$x^4\frac{dy}{dx} + 2x^3y = 5.$$
(b) Encuentre una función $N(x, y)$ tal que la ecuación diferencial
$$\left(ye^{xy} + 2xy + \frac{1}{y}\right)dx + N(x, y)\,dy = 0$$
sea exacta.

3. Martha tiene invertidos actualmente 50.000 dólares en una cuenta de ahorros que gana 5 % anual capitalizado continuamente. Las condiciones del mercado están mejorando y ella decide transferir continuamente el 25 % de lo que tiene en su cuenta a un fondo de acciones que gana 15 % anual. Ella también retira 5.000 dólares al año de su cuenta de ahorros para gastos.
   (a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial que determine la cantidad de dinero que hay en la cuenta de ahorros y en el fondo de acciones, respectivamente, dentro de t años.
   (b) ¿Cuánto tardará la cuenta de ahorros en agotarse?
   (c) ¿Cuánto dinero habrá en el fondo de acciones en ese momento?

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares o dispositivos móviles en general, incluyendo relojes inteligentes, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

①

a) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$

$y' = c_1 e^x + c_2(e^x + xe^x)$

$= c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x$

$y'' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x$

Entonces

$y'' - 2y' + y$

$= c_1 e^x + 2c_2 e^x + c_2 x e^x$

$- 2c_1 e^x - 2c_2 e^x - 2c_2 x e^x$

$+ c_1 e^x + c_2 x e^x = 0$

b) $\frac{dy}{dx} = xe^{2x-y}$

$= xe^{2x} \cdot e^{-y}$

$\int e^y dy = \int x e^{2x} dx$

$e^y = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$

$y = \ln\left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c\right)$

② a) $x^4 \frac{dy}{dx} + 2x^3 y = 5$

$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \frac{5}{x^4}$

$p(x) = \frac{2}{x} \quad \wedge \quad g(x) = \frac{5}{x^4}$

$\Rightarrow y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[\int e^{\int \frac{2}{x} dx} \cdot \frac{5}{x^4} + c \right]$

$= e^{-2\ln x} \left[\int e^{2\ln x} \cdot \frac{5}{x^4} + c \right]$

$= x^{-2} \left[\int \frac{5}{x^2} + c \right]$

$y = x^{-2} \left[\frac{-5}{x} + c \right]$

$\Rightarrow y = \frac{-5}{x^3} + \frac{c}{x^2}$

b) $(\underbrace{ye^{xy} + 2xy + \frac{1}{y}}_{M}) dx + N(x,y) dy = 0$

La ecuación es exacta si,

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$

$= e^{xy} + xye^{xy} + 2x - \frac{1}{y^2}$

$\Rightarrow M = \int (e^{xy} + xy e^{xy} + 2x - \frac{1}{y^2}) dx$

$= \frac{1}{y} e^{xy} + y \left(\frac{1}{y} x e^{xy} - \frac{1}{y^2} e^{xy} \right) + x^2 - \frac{x}{y^2} + g(y)$

$= \cancel{\frac{1}{y} e^{xy}} + xe^{xy} - \cancel{\frac{1}{y} e^{xy}} + x^2 - \frac{x}{y^2} + g(y)$

$= xe^{xy} + x^2 - \frac{x}{y^2} + g(y)$

③ Sea A(t) el valor de la cuenta de ahorro después de t años y F(t) el valor en el fondo de acciones. Entonces

$\frac{dA}{dt} = 0{,}05A - 0{,}25A - 5000 = -0{,}2A - 5000$

y

$\frac{dF}{dt} = 0{,}15F + 0{,}25A \quad (*)$

Dado que:

$\frac{dA}{dt} + 0{,}2A = -5000$

$\Rightarrow A(t) = e^{-\int 0{,}2 dt} \left[\int e^{\int 0{,}2 dt} \cdot (-5000) + c \right]$

$= e^{-0{,}2t} \left[-5000 \int e^{0{,}2t} dt + c \right]$

$= e^{-0{,}2t} \left[-25000 e^{0{,}2t} + c \right]$

$= -25000 + ce^{-0{,}2t}$

Como $A(0)=50\,000$, entonces

$$50\,000 = A(0) = -25000 + c$$

$$c = 75000$$

$$\Rightarrow A(t) = -25000 + 75000\, e^{-0{,}2t} = 25000\left(-1+3e^{-0{,}2t}\right)$$

Reemplazando en (*)

$$\frac{dF}{dt} - 0{,}15F = 6250\left(-1+3e^{-0{,}2t}\right)$$

Entonces

$$F(t) = e^{-\int -0{,}15dt}\left[\int e^{\int -0{,}15dt} \cdot 6250\left(-1+3e^{-0{,}2t}\right)dt + c\right]$$

$$= e^{0{,}15t}\left[6250\int e^{-0{,}15t}\left(-1+3e^{-0{,}2t}\right)dt + c\right]$$

$$= e^{0{,}15t}\left[6250\int\left(-e^{-0{,}15t}+3e^{-0{,}35t}\right)dt + c\right]$$

$$= e^{0{,}15t}\left[6250\left(\frac{20}{3}e^{-0{,}15t} - \frac{60}{7}e^{-0{,}35t}\right) + c\right]$$

$$= \frac{125000}{3} - \frac{375000}{7}e^{-0{,}2t} + ce^{0{,}15t}$$

Como $F(0)=0$ entonces $c = 11904{,}7619$

$$F(t) = \frac{125000}{3} - \frac{375000}{7}e^{-0{,}2t} + \left(\frac{375000}{7} - \frac{125000}{3}\right)e^{0{,}15t}$$

b) $A(t)=0 \Leftrightarrow 25000\left(-1+3e^{-0{,}2t}\right)=0$

$$e^{-0{,}2t} = 1/3$$

$$t = \frac{\ln(1/3)}{-0{,}2} = 5{,}5 \text{ años}$$

c) $F(5{,}5) = \frac{125000}{3} - \frac{375000}{7}e^{-0{,}2\cdot 5{,}5} + \left(\frac{375000}{7} - \frac{125000}{3}\right)e^{0{,}15\cdot 5{,}5} \approx 50999{,}5344$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Examen final de Cálculo III ANEC 201610
FILA A
June 1, 2016

Nombre completo: Esteban Hernández Código 200083259

---

1. (a) Verifique que la función $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ es solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = 0.$$

(b) Halle la solución general de la ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x-y}.$$

---

2. (a) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 2.$$

(b) Encuentre una función $M(x, y)$ tal que la ecuación diferencial

$$M(x, y)\, dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x} \right) dy = 0$$

sea exacta.

$\frac{M}{dx}$ y N

---

3. Martha tiene invertidos actualmente 40.000 dólares en una cuenta de ahorros que gana 3 % anual capitalizado continuamente. Las condiciones del mercado están mejorando y ella decide transferir continuamente el 20 % de lo que tiene en su cuenta a un fondo de acciones que gana 10 % anual. Ella también retira 4.000 dólares al año de su cuenta de ahorros para gastos.

(a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial que determine la cantidad de dinero que hay en la cuenta de ahorros y en el fondo de acciones, respectivamente, dentro de t años.

(b) ¿Cuánto tardará la cuenta de ahorros en agotarse?

(c) ¿Cuánto dinero habrá en el fondo de acciones en ese momento?

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares o dispositivos móviles en general, incluyendo relojes inteligentes, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

① a) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

$y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}$

$y'' = 4c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{-2x}$

Entonces

$y'' - 4y$

$= \cancel{4c_1 e^{2x}} + \cancel{4c_2 e^{-2x}} - \cancel{4c_1 e^{2x}} - \cancel{4c_2 e^{-2x}}$

$= 0$

b) $\frac{dy}{dx} = 2x e^{x-y}$

$= 2x e^{x} \cdot e^{-y}$

$\int e^{y} dy = 2\int x e^{x} dx$

$e^{y} = 2(xe^{x} - e^{x} + c)$

$y = \ln(xe^{x} - e^{x} + c) + \ln 2$

②

a) $x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 2$

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = \frac{2}{x^2}$

$p(x) = \frac{1}{x} \wedge g(x) = \frac{2}{x^2}$

$\Rightarrow y = e^{-\int \frac{1}{x} dx}\left[\int e^{\int \frac{1}{x}dx} \cdot \frac{2}{x^2} dx + C\right]$

$= e^{-\ln x} \left[\int e^{\ln x} \cdot \frac{2}{x^2} dx + C\right]$

$= x^{-1}\left[\int \frac{2}{x} dx + c\right]$

$= x^{-1}\left[2\ln x + c\right]$

(b) $M(x,y)\,dx + \underbrace{(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x})}_{N} dy = 0$

La ecuación es exacta si

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$= e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow M = \int (e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}) dy$

$= \frac{1}{x} e^{xy} + x\left(\frac{1}{x} ye^{xy} - \frac{1}{x^2} e^{xy}\right) + y^2 - \frac{y}{x^2} + g(x)$

$= \cancel{\frac{1}{x} e^{xy}} + ye^{xy} - \cancel{\frac{1}{x} e^{xy}} + y^2 - \frac{y}{x^2} + g(x)$

$= y e^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2} + g(x)$

③ Sea $A(t)$ el valor de la cuenta de ahorros después de t años y $F(t)$ el valor en el fondo de acciones. Entonces

$\frac{dA}{dt} = 0{,}03A - 0{,}2A - 4000$; $A(0) = 40000$

y $\frac{dF}{dt} = 0{,}1F + 0{,}2A$ (*)

Dado que $\frac{dA}{dt} + 0{,}17A = -4000$

$\Rightarrow A(t) = e^{-\int 0{,}17 dt}\left[\int e^{\int 0{,}17 dt} \cdot (-4000) dt + c\right]$

$= e^{-0{,}17t}\left[-4000 \int e^{0{,}17t} + c\right]$

$= e^{-0{,}17t}\left[-\frac{400000}{17} e^{0{,}17t} + c\right]$

$= -\frac{400000}{17} + c\, e^{-0{,}17t}$

Como $A(0) = 40000$, entonces

$$40000 = A(0) = -\frac{400000}{17} + C$$

$$C = \frac{1080000}{17}$$

$$\Rightarrow A(t) = -\frac{400000}{17} + \frac{1080000}{17} e^{-0,17t}$$

$$= \frac{40000}{17}\left(-10 + 27 e^{-0,17t}\right)$$

Reemplazando en (*)

$$\frac{dF}{dt} - 0,1F = \frac{8000}{17}\left(-10 + 27e^{-0,17t}\right)$$

Entonces,

$$F(t) = e^{-\int -0,1\,dt}\left[\int e^{\int -0,1\,dt} \cdot \frac{8000}{17}\left(-10+27e^{-0,17t}\right)dt + C\right]$$

$$= e^{0,1t}\left[\frac{8000}{17}\int e^{-0,1t}\left(-10+27e^{-0,17t}\right)dt + c\right]$$

$$= e^{0,1t}\left[\frac{8000}{17}\int\left(-10e^{-0,1t} + 27e^{-0,27t}\right)dt + c\right]$$

$$= e^{0,1t}\left[\frac{8000}{17}\left(100e^{-0,1t} - 100e^{-0,27t}\right) + c\right]$$

$$= \frac{800000}{17} - \frac{800000}{17}e^{-0,17t} + ce^{0,1t}$$

Como $F(0)=0$, entonces $C=0$

$$F(t) = \frac{800000}{17} - \frac{800000}{17}e^{-0,17t}$$

b) $A(t)=0 \longrightarrow \frac{40000}{17}\left(-10+27e^{-0,17t}\right)=0$

$$e^{-0,17t} = \frac{10}{27}$$

$$t = \frac{\ln(10/27)}{-0,17} = 5,8427 \text{ año}$$

5,8 años

c) $F(5,8) = \frac{800000}{17} - \frac{800000}{17}e^{-0,17\times 5,8}$

$$= \frac{800000}{17}\left(1 - e^{-0,17\times 5,8}\right)$$

$$= 29502,7777$$