UNIVERSIDAD DEL NORTE
INTERSEMESTRAL
PARCIAL FINAL DE CÁLCULO III (ANEC)
JULIO 13 DE 2016

Nombre: Solucionario

1. Verifique que la función indicada es solución de la ecuación diferencial dada.

$$x^2y' + x(x+2)y = e^x; \qquad y = \frac{1}{2}x^{-2}e^x + Cx^{-2}e^{-x}$$

2. Resuelva la ecuación dada por separación de variables.

$$-\left(e^y+1\right)^2 e^{-y}dx + \left(e^x+1\right)^3 e^{-x}dy = 0$$

3. Determine si la ecuación diferencial es exacta. Si lo es, resuélvala.

$$\left(3x^2y + e^y\right)dx + \left(x^3 + xe^y - 2y\right)dy = 0$$

4. Nathan tiene actualmente \$40000 invertidos en una cuenta de ahorros que gana 3 % anual capitalizado continuamente. Las condiciones de mercado están mejorando y él decide transferir continuamente 15 % de su cuenta a un fondo de acciones que gana 12 % anual. Él retira \$5000 anualmente de su cuenta de ahorros para gastos.

   a) Plantee y resuelva un par de ecuaciones diferenciales acopladas para determinar la cantidad de dinero en cada cuenta dentro de t años.

   b) ¿Cuánto tiempo tardará la cuenta de ahorros en agotarse? ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta de acciones en ese momento?

① $x^2y' + x(x+2)y = e^x$

y_1

$$y = \frac{1}{2}x^{-2}e^{x} + Cx^{-2}e^{-x}$$

Tenemos que

$$y' = \frac{1}{2}\left(-2x^{-3}e^{x} + x^{-2}e^{x}\right) + C\left(-2x^{-3}e^{-x} - x^{-2}e^{-x}\right)$$

$$= -x^{-3}e^{x} + \frac{1}{2}x^{-2}e^{x} - 2Cx^{-3}e^{-x} - Cx^{-2}e^{-x}$$

Luego,

$$x^2y' + (x^2+2x)y$$

$$= \cancel{-x^{-1}e^{x}} + \frac{1}{2}e^{x} \cancel{- 2cx^{-1}e^{-x}} \cancel{- ce^{-x}} + \frac{1}{2}e^{x} \cancel{+ ce^{-x}} \cancel{+ x^{-1}e^{x}} \cancel{+ 2cx^{-1}e^{-x}}$$

$$= \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{x} = e^{x}$$

② $-(e^y+1)^2e^{-y}dx + (e^x+1)^3e^{-x}dy = 0$

$$(e^x+1)^3e^{-x}dy = (e^y+1)^2e^{-y}dx$$

$$\underbrace{\int \frac{e^y}{(e^y+1)^2}dy}_{I_1} = \underbrace{\int \frac{e^x}{(e^x+1)^3}dx}_{I_2} \quad (*)$$

Para I_1, sea $u := e^y+1$ $du = e^y dy$

$$I_1 = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + C$$

$$= -(e^y+1)^{-1} + C.$$

Para I_2, sea $u := e^x+1$ $du = e^x dx$

$$I_2 = \int u^{-3}du = \frac{u^{-2}}{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{2}(e^x+1)^{-2} + C$$

Reemplazando en $(*)$,

$$\frac{-1}{e^y+1} = \frac{-1}{2(e^x+1)^2} + C$$

$$\frac{1}{e^y+1} = \frac{1}{2(e^x+1)^2} + C$$

$$\frac{1}{e^y+1} = \frac{1+2C(e^x+1)^2}{2(e^x+1)^2}$$

$$e^y + 1 = \frac{2(e^x+1)^2}{1+2c(e^x+1)^2}$$

$$y = \ln\left[\frac{2(e^x+1)^2}{1+2c(e^x+1)^2} - 1\right]$$

③ $\underbrace{(3x^2y+e^y)}_{M}dx + \underbrace{(x^3+xe^y-2y)}_{N}dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + e^y \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + e^y$$

La ecuación es exacta, entonces existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

esto es,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + e^y} \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + xe^y - 2y$$

$\downarrow$ integramos con respecto a x

$$f(x,y) = \int (3x^2y + e^y)dx + h(y)$$

$$= x^3y + xe^y + h(y)$$

Ahora bien,

$$\cancel{x^3} \cancel{+ xe^y} - 2y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \cancel{x^3} \cancel{+ xe^y} + h'(y)$$

$$h'(y) = -2y \Rightarrow h(y) = -y^2 + c.$$

Luego,

$$f(x,y) = x^3y + xe^y - y^2 + c$$

La solución general de la ecuación exacta es

$$x^3y + xe^y - y^2 = C.$$

④ Sea $A(t)$ el saldo en la cuenta

a) de ahorros y $F(t)$ el valor del fondo en función del tiempo t (años), entonces

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}03A - 0{,}15A - 5000 \; ; \; A(0) = 40000 \quad (i)$$

$$\frac{dF}{dt} = 0{,}12F + 0{,}15A \; ; \; F(0) = 0 \quad (ii)$$

De (i),

$$\frac{dA}{dt} = -0{,}12A - 5000$$

$$\int \frac{dA}{0{,}12A+5000} = -\int dt$$

$$\frac{1}{0{,}12}\ln(0{,}12A+5000) = -t + c$$

$$\ln(0{,}12A+5000) = -0{,}12t + c$$

$$0{,}12A + 5000 = Ce^{-0{,}12t}$$

$$0{,}12A = Ce^{-0{,}12t} - 5000$$

$$A(t) = \frac{25}{3}Ce^{-0{,}12t} - \frac{125000}{3}$$

Como $A(0) = 40000$, entonces

$$40000 = A(0) = \frac{25}{3}C - \frac{125000}{3}$$

$$C = 9800$$

Entonces

$$A(t) = \frac{245000}{3}e^{-0{,}12t} - \frac{125000}{3}$$

Reemplazamos en (ii), obtenemos

$$\frac{dF}{dt} - 0{,}12F = 12250e^{-0{,}12t} - 6250$$

Entonces,

$$F = e^{-\int -0{,}12dt}\left[\int e^{\int -0{,}12dt}\cdot\left(12250e^{-0{,}12t} - 6250\right)dt + C\right]$$

$$= e^{0{,}12t}\left[\int e^{-0{,}12t}\left(12250e^{-0{,}12t} - 6250\right)dt + C\right]$$

$$= e^{0{,}12t}\left[12250\int e^{-0{,}24t}dt - 6250\int e^{-0{,}12t}dt + C\right]$$

$$= e^{0{,}12t}\left[-\frac{153125}{3}e^{-0{,}24t} + \frac{156250}{3}e^{-0{,}12t} + C\right]$$

$$= -\frac{153125}{3}e^{-0{,}12t} + \frac{156250}{3} + Ce^{0{,}12t}$$

Como $F(0)=0$, entonces

$$0 = -\frac{153125}{3} + \frac{156250}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{3125}{3}$$

Luego,

$$F(t) = -\frac{153125}{3}e^{-0{,}12t} + \frac{156250}{3} - \frac{3125}{3}e^{0{,}12t}$$

b) La cuenta de ahorros se agota cuando $A(t)=0$, esto es,

$$\frac{245000}{3}e^{-0{,}12t} - \frac{125000}{3} = 0$$

$$e^{-0{,}12t} = \frac{125000/3}{245000/3} = \frac{25}{49}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{-0{,}12}\ln(25/49) \approx 5{,}6$$

En este momento, en el fondo de acciones hay

$$F(5{,}6) \approx 23977{,}32$$