UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Examen final de Cálculo III ANEC 201630
Fila A
November 23, 2016

Nombre completo: Solucionario Código:

1. Verifique que la función $y = \frac{1}{20}x^4 - \frac{c_1}{x} + c_2$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = x^3$$

2. Resuelva la siguiente ecuación de variables separables: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+4}{xy}$

3. Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = \frac{2}{x+1}$$

4. Luisa planea hacer un depósito en una cuenta que gana el 5 % de interés anual, capitalizado continuamente, y luego hacer retiros de \$ 8000 cada uno. ¿Cuánto debe depositar si su cuenta tarda 15 años en agotarse?

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

① $y = \frac{1}{20}x^4 - \frac{c_1}{x} + c_2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}x^3 + \frac{c_1}{x^2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{5}x^2 - \frac{2c_1}{x^3}$

Entonces,

$\frac{xd^2y}{dx^2} + \frac{2dy}{x}$

$= \frac{3}{5}x^3 - \cancel{\frac{2c_1}{x^2}} + \frac{2}{5}x^3 + \cancel{\frac{2c_1}{x^2}}$

$= \frac{3}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^3 = x^3.$

② $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+4}{xy}$

$\int \frac{y}{y^2+4}\,dy = \int \frac{dx}{x} + C$

$\frac{1}{2}\ln(y^2+4) = \ln|x| + C$

$\ln(y^2+4) = \ln x^2 + C$

$y^2+4 = Cx^2$

$y = \pm\sqrt{Cx^2-4}$

③ $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x+1}y = \frac{2}{x+1}$

$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right]$

$= e^{-\int \frac{1}{x+1}dx}\left[\int e^{\int \frac{1}{x+1}dx} \cdot \frac{2}{x+1}dx + C\right]$

$= e^{-\ln(x+1)}\left[\int e^{\ln(x+1)} \cdot \frac{2}{x+1}dx + C\right]$

$= (x+1)^{-1}\left[\int 2dx + C\right]$

$= (x+1)^{-1}(2x+C)$

$= \frac{2x+C}{x+1}$

④ Sea $V(t)$ el valor en la cuenta después de t años.

Tenemos,

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}05V - 8000$$

$$V(0) = D \quad \wedge \quad V(15) = 0.$$

Sol:

$\frac{dV}{dt} - 0{,}05V = -8000$

$V(t) = e^{-\int -0{,}05dt}\left[\int e^{\int -0{,}05dt} \cdot (-8000)dt + C\right]$

$= e^{0{,}05t}\left[-8000\int e^{-0{,}05t}dt + C\right]$

$= e^{0{,}05t}\left[-8000 \cdot \frac{1}{-0{,}05} e^{-0{,}05t} + C\right]$

$= e^{0{,}05t}\left(160000\,e^{-0{,}05t} + C\right)$

$= 160000 + Ce^{0{,}05t}$

Ahora bien,

$D = V(0) = 160000 + C \Rightarrow C = D - 160000$

Entonces

$V(t) = 160000 + (D - 160000)e^{0{,}05t}$

Por tanto,

$0 = V(15) = 160000 + (D-160000)e^{0{,}05 \cdot 15}$

$-160000 = (D - 160000)e^{0{,}75}$

$-160000e^{-0{,}75} + 160000 = D$

$D \approx 84421{,}35$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Examen final de Cálculo III ANEC 201630
Fila B
November 23, 2016

Nombre completo: Solucionario. Código:

1. Verifique que la función $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + x$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x - 2$$

2. Resuelva la siguiente ecuación de variables separables: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^2 + 5}{xy}$

3. Resuelva la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{x+1} = x + 1$$

4. Luisa planea hacer un depósito en una cuenta que gana el 8 % de interés anual, capitalizado continuamente, y luego hacer retiros de \$ 6000 cada uno. ¿Cuánto debe depositar si su cuenta tarda 12 años en agotarse?

Tiempo máximo: 105 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

① $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + x$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 e^x + c_2(e^x + xe^x) + 1$$
$$= c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x$$
$$= c_1 e^x + 2c_2 e^x + c_2 x e^x$$

Entonces,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y$$
$$= \cancel{c_1 e^x} + \cancel{2c_2 e^x} + \cancel{c_2 x e^x}$$
$$-\cancel{2c_1 e^x} - \cancel{2c_2 e^x} - \cancel{2c_2 x e^x} - 2$$
$$+\cancel{c_1 e^x} + \cancel{c_2 x e^x} + x$$
$$= x - 2$$

② $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^2+5}{xy}$

$$\int \frac{y}{3y^2+5}\,dy = \int \frac{dx}{x} + C$$
$$\frac{1}{6}\ln(3y^2+5) = \ln|x| + C$$
$$\ln(3y^2+5) = \ln x^6 + C$$
$$3y^2+5 = Cx^6$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{Cx^6-5}{3}}$$

③ $\dfrac{dy}{dx} + \underbrace{\dfrac{x}{x+1}}_{p(x)}\, y = \underbrace{x+1}_{g(x)}$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} g(x)\,dx + C\right]$$
$$= e^{-\int \frac{x}{x+1}dx}\left[\int e^{\int \frac{x}{x+1}dx}\cdot(x+1)\,dx + C\right]$$
$$= e^{-[x-\ln(x+1)]}\left[\int e^{x-\ln(x+1)}\cdot(x+1)\,dx + C\right]$$
$$= e^{-x}(x+1)\left[\int e^{x}\cdot(x+1)^{-1}\cdot(x+1)\,dx + C\right]$$
$$= e^{-x}(x+1)\left[\int e^x\,dx + C\right]$$
$$= e^{-x}(x+1)\left[e^x + C\right]$$
$$= (x+1)(1 + Ce^{-x}).$$

④ Sea $V(t)$ el valor en la cuenta después de t años.

Tenemos

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}08V - 6000$$
$$V(0) = D \quad \wedge \quad V(12) = 0$$

Sol:

$$\frac{dV}{dt} - 0{,}08V = -6000$$
$$V(t) = e^{-\int -0{,}08\,dt}\left[\int e^{\int -0{,}08\,dt}\cdot(-6000)\,dt + C\right]$$
$$= e^{0{,}08t}\left[-6000\int e^{-0{,}08t} + C\right]$$
$$= e^{0{,}08t}\left[-6000\cdot\frac{1}{-0{,}08}e^{-0{,}08t} + C\right]$$
$$= e^{0{,}08t}\left(75000\,e^{-0{,}08t} + C\right)$$
$$= 75000 + Ce^{0{,}08t}$$

Ahora bien,

$$D = V(0) = 75000 + C \Rightarrow C = D - 75000$$

Entonces

$$V(t) = 75000 + (D-75000)e^{0{,}08t}$$

Por tanto,

$$0 = V(12) = 75000 + (D-75000)e^{0{,}08\cdot 12}$$
$$-75000 = (D-75000)e^{0{,}96}$$
$$-75000\,e^{-0{,}96} + 75000 = D$$
$$D \approx 46283{,}03$$