UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Examen final de Cálculo III ANEC 201710
Fila A
May 24, 2017

Nombre completo: Solucionario Código:

1. Resuelva la ecuación diferencial dada.
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{2y-x}$.
   (b) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3}{x+2}y = \dfrac{5}{(x+2)^2}$.

---

2. Determine si la ecuación diferencial es exacta. Si lo es, resuélvala.

$$\left(\frac{y}{x} - 3x^2\right) dx + \left(\ln x - \frac{1}{y} + 3y^2\right) dy = 0.$$

---

3. Un gerente de inversiones determina que el valor V de cierta inversión está creciendo con respecto al tiempo a una razón que es proporcional a V^2. Si el valor inicial de la inversión fue de 10 000 dólares y tardó cinco años en duplicarse, cuánto tardará para que la inversión valga 60 000 dólares?

---

4. Fabiola desea comprar una casa que cuesta 32 000 dólares dentro de seis años. Para esto, deposita Q dólares en una cuenta de ahorro que gana intereses de 5% capitalizado continuamente. Además, planea hacer depósitos anuales que sumen 2 500 dólares. De cuánto debe ser el depósito inicial Q para cumplir su propósito?

Tiempo máximo: 110 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

① a) $\frac{dy}{dx} = e^{2y-x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2y}}{e^{x}}$$

$$\int e^{-2y}dy = \int e^{-x}dx + C.$$

$$\frac{-1}{2}e^{-2y} = -e^{-x} + C$$

b) $\frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{3}{x+2}}_{P(x)}y = \underbrace{\frac{5}{(x+2)^2}}_{f(x).}$

- factor integrante
$I = e^{\int \frac{3}{x+2}dx} = (x+2)^3$

- $\int I f(x)dx = \int 5(x+2)dx$
$= \frac{5x^2}{2} + 10x$

- $y(x) = \frac{1}{(x+2)^3}\left[\frac{5}{2}x^2 + 10x + C\right]$

② $\underbrace{\left(\frac{y}{x} - 3x^2\right)}_{M}dx + \underbrace{\left(\ln x - \frac{1}{y} + 3y^2\right)}_{N}dy = 0$

$M_y = \frac{1}{x} \wedge N_x = \frac{1}{x}$

La EDO es exacta dado que $M_y = N_x$.
Existe $f(x,y)$ tal que

$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} - 3x^2}$ $\wedge$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \ln x - \frac{1}{y} + 3y^2$

integramos con respecto a x

$$f(x,y) = \int\left(\frac{y}{x} - 3x^2\right)dx + g(y)$$
$$= y\ln x - x^3 + g(y).$$

Entonces,

$$\ln x - \frac{1}{y} + 3y^2 = \frac{\partial f}{\partial y} = \ln x + g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = -\frac{1}{y} + 3y^2 \Rightarrow g(y) = -\ln y + y^3 + C.$$

la solución general de la EDO es

$$y\ln x - x^3 - \ln y + y^3 = C.$$

③ $\frac{dv}{dt} = kv^2$; $V(0) = 10000$, $V(5) = 20000$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int k dt + c.$$

$$\frac{-1}{v} = kt + c.$$

$$\frac{1}{v} = -kt + c.$$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{1}{-kt + c.}$$

Ahora bien:

i) $10000 = V(0) = \frac{1}{C} \Rightarrow C = \frac{1}{10000}$

ii) $20000 = \frac{1}{-5k + \frac{1}{10000}} \Rightarrow k = \frac{1}{100000}$

Entonces,

$$V(t) = \frac{1}{\frac{-t}{100000} + \frac{1}{10000}}$$

Ahora bien,

$$60000 = V(t) = \frac{1}{\frac{-t}{100000} + \frac{1}{10000}} \Rightarrow t = \frac{25}{3}$$

④ Sea $V(t)$ el valor en la cuenta en función del tiempo t (años).

$$\frac{dv}{dt} = 0{,}05V + 2500 \; ; \; V(0) = Q, \; V(6) = 32000$$

Tenemos que

$$\frac{dv}{dt} - 0{,}05V = 2500 \Rightarrow V(t) = Ce^{0{,}05t} - 50000.$$

Ahora bien,

$Q = V(0) = C - 50000$, entonces $C = 50000 + Q$.

Y,

$$32000 = V(6) = Ce^{0{,}05 \cdot 6} - 50000$$
$$= (50000 + Q)e^{0{,}3} - 50000$$

$$\frac{32000 + 50000}{e^{0{,}3}} - 50000 \Rightarrow Q \approx 10747$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Examen final de Cálculo III ANEC 201710
Fila B
May 24, 2017

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Nombre completo: Solucionario Código:

1. Resuelva la ecuación diferencial dada.

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x-y}$.

   (b) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x+1}y = \dfrac{4}{x+1}$.

---

2. Determine si la ecuación diferencial es exacta. Si lo es, resuélvala.

$$\left(\frac{1}{x} - \ln y + 3x\right) dx + \left(2y^3 - \frac{x}{y}\right) dy = 0.$$

---

3. Un gerente de inversiones determina que el valor V de cierta inversión está creciendo con respecto al tiempo a una razón que es proporcional a V^2. Si el valor inicial de la inversión fue de 20 000 dólares y tardó seis años en duplicarse, cuánto tardará para que la inversión valga 80 000 dólares?

---

4. Maria desea comprar una casa que cuesta 26 000 dólares dentro de cinco años. Para esto, deposita Q dólares en una cuenta de ahorro que gana intereses de 4% capitalizado continuamente. Además, planea hacer depósitos anuales que sumen 2 400 dólares. De cuánto debe ser el depósito inicial Q para cumplir su propósito?

Tiempo máximo: 110 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude !

① a) $\frac{dy}{dx} = e^{2x-y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{e^{y}}$$

$$\int e^{y}dy = \int e^{2x}dx + c$$

$$e^{y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

b) $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x+1}y = \frac{4}{x+1}$

- factor integrante

$$I = e^{\int \frac{2}{x+1}dx} = (x+1)^2$$

- $\int I f(x)dx = \int 4(x+1)dx$

$$= 2x^2 + 4x$$

- $y(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\left[2x^2+4x+c\right]$

② $\underbrace{\left(\frac{1}{x} - \ln y + 3x\right)}_{M}dx + \underbrace{\left(2y^3 - \frac{x}{y}\right)}_{N}dy = 0$

$M_y = -\frac{1}{y} \wedge N_x = -\frac{1}{y}$

La EDO es exacta dado que $M_y = N_x$. Existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} - \ln y + 3x \wedge \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^3 - \frac{x}{y}}$$

integramos con respecto a y

$$f(x,y) = \int \left(2y^3 - \frac{x}{y}\right)dy + g(x)$$

$$= \frac{1}{2}y^4 - x\ln y + g(x)$$

Entonces,

$$\frac{1}{x} - \ln y + 3x = \frac{\partial f}{\partial x} = -\ln y + g'(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} + 3x \Rightarrow g(x) = \ln x + \frac{3}{2}x^2 + c$$

la solución general de la EDO es

$$\frac{1}{2}y^4 - x\ln y + \ln x + \frac{3}{2}x^2 = c.$$

③ $\frac{dv}{dt} = kv^2$; $V(0) = 20000$, $V(6) = 40000$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int k\,dt + c$$

$$\frac{-1}{V} = kt + c$$

$$\frac{1}{V} = -kt + c$$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{1}{-kt+c}$$

Ahora bien:

i) $20000 = V(0) = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{20000}$

ii) $40000 = \frac{1}{-6k + \frac{1}{20000}} \Rightarrow k = \frac{1}{240000}$

Entonces,

$$V(t) = \frac{1}{\frac{-t}{240000} + \frac{1}{20000}}$$

Ahora bien,

$$80000 = V(t) = \frac{1}{\frac{-t}{240000} + \frac{1}{20000}} \Rightarrow t = 9$$

④ Sea $v(t)$ el valor en la cuenta en función del tiempo t (años).

$$\frac{dv}{dt} = 0{,}04V + 2400;\ V(0) = Q,\ V(5) = 26000$$

Tenemos que

$$\frac{dv}{dt} - 0{,}04V = 2400 \Rightarrow V(t) = ce^{0{,}04t} - 60000$$

Ahora bien,

$$Q = V(0) = c - 60000 \Rightarrow c = Q + 60000$$

y,

$$26000 = V(5) = ce^{0{,}04\cdot 5} - 60000$$

$$= (Q+60000)e^{0{,}2} - 60000$$

$$\frac{26000+60000}{e^{0{,}2}} - 60000 = Q \Rightarrow Q \approx 10410$$