UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Examen Final de Cálculo III ANEC 201730
Fila A
Noviembre 16 de 2017

Nombre completo:____________________Código:____________________

1. **[10 pts]** Verifique que $y = C_1x + C_2x^3 + 2x^2e^x - 2xe^x$ es solución de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x.$$

---

2. **[15 pts]** Encuentre la solución general de la EDO dada.

   (a) [6 pts] $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+4}{xy}$. (Ecuación separable)

   (b) [9 pts] $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = xe^{x^3}$. (Ecuación lineal de primer orden)

---

3. **[10 pts]** Determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si es exacta, resuélvala.

$$\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right) dx + (\ln x - 1)\, dy = 0.$$

---

4. **[15 pts]** Marcia tiene invertidos actualmente \$30 000 en un fondo de mercado de dinero, que gana 2% anual capitalizado continuamente. Las condiciones del mercado están mejorando y ella decide transferir continuamente 25% de su cuenta a un fondo de acciones que gana 10% anual. Ella también retira \$5 000 al año de su fondo de mercado para gastos.

   (a) [10 pts] Plantee y resuelva una pareja de ecuaciones diferenciales acopladas para determinar la cantidad de dinero en cada cuenta dentro de t años.

   (b) [3 pts] ¿Cuánto tardará el fondo de mercado en agotarse?

   (c) [2 pts] ¿Cuánto dinero habrá en el fondo de acciones en el momento de agotarse el fondo de mercado?

Tiempo máximo: 110 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario de la fila A
Final 201730

(1) $y = C_1 x + C_2 x^3 + 2x^2 e^x - 2x e^x$

$y' = C_1 + 3C_2 x^2 - 2e^x + 2x e^x + 2x^2 e^x$

$y'' = 6C_2 x + 6x e^x + 2x^2 e^x$

Entonces,

$x^2 y'' - 3xy' + 3y$

$= 6C_2 x^3 + 6x^3 e^x + 2x^4 e^x$

$-3C_1 x - 9C_2 x^3 + 6x e^x - 6x^2 e^x - 6x^3 e^x$

$+3C_1 x + 3C_2 x^3 + 6x^2 e^x - 6x e^x$

$= 2x^4 e^x$

(2) a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+4}{xy}$

$$\int \frac{y}{y^2+4} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$\frac{1}{2}\ln(y^2+4) = \ln x + C.$

b) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x e^{x^3}$

i) Forma estándar

$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x} y = \underbrace{e^{x^3}}_{f(x)}.$

ii) Factor integrante

$I(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$

iii) $\int I(x) f(x)\, dx = \int x^2 e^{x^3} dx$

$= \frac{1}{3} e^{x^3} + C$

iv) Solución general

$y(x) = \dfrac{1}{x^2}\left[\dfrac{1}{3} e^{x^3} + C\right]$

(3) $\underbrace{\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right)}_{M} dx + \underbrace{(\ln x - 1)}_{N} dy = 0$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{1}{x} \quad \wedge \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{1}{x}$

Dado que $M_y = N_x$, entonces la EDO es exacta. Existe $f(x,y)$ tal que

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 + \ln x + \dfrac{y}{x} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \ln x - 1$

integrando con respecto a y

$f(x,y) = y\ln x - y + g(x).$

Ahora bien,

$1 + \ln x + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

$= \dfrac{y}{x} + g'(x) \Rightarrow g'(x) = 1 + \ln x.$

$g(x) = \int (1+\ln x)\, dx + C = x + x\ln x - x + C = x\ln x + C.$

La solución general de la EDO es

$y\ln x - y + x\ln x = C.$

(4) Sean $V(t)$ y $F(t)$ los saldos en el fondo de mercado y en el fondo de acciones, respectivamente, después de t años. Entonces,

a) $\dfrac{dV}{dt} = 0{,}02V - 0{,}25V - 5000$; $V(0) = 30000$

$\dfrac{dF}{dt} = 0{,}25V + 0{,}1F$; $F(0) = 0.$

(i) $\dfrac{dV}{dt} + 0{,}23V = -5000$; $V(0) = 30000.$

La solución del anterior PVI es

$V(t) = -\dfrac{500000}{23} + \dfrac{1190000}{23} e^{-0{,}23t}$

(ii) Entonces,

$\dfrac{dF}{dt} = 0{,}25\left(-\dfrac{500000}{23} + \dfrac{1190000}{23} e^{-0{,}23t}\right) + 0{,}1F$; $F(0) = 0.$

En consecuencia,

$$\frac{dF}{dt} - 0{,}1F = -\frac{125000}{23} + \frac{297500}{23} e^{-0{,}23t} \quad ; \; F(0) = 0$$

La solución del anterior PVI es

$$F(t) = \frac{1250000}{23} - \frac{1959815547}{50000} e^{-0{,}23t} - \frac{303030303}{20000} e^{0{,}1t}.$$

b) Debemos resolver la ecuación

$$V(t) = 0$$

esto es,

$$-\frac{500000}{23} + \frac{1190000}{23} e^{-0{,}23t} = 0.$$

Tenemos,

$$t = \frac{1}{-0{,}23} \ln\left(\frac{500000/23}{1190000/23}\right) \approx 3{,}77$$

c) La cantidad de dinero que hay en el fondo de acciones una vez agotado el fondo de mercado es

$$F(3{,}77) = \frac{1250000}{23} - \frac{1959815547}{50000} e^{-0{,}23 \cdot 3{,}77} - \frac{303030303}{20000} e^{0{,}1 \cdot 3{,}77}.$$

$$\approx 15522{,}023.$$

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

1. **[10 pts]** Verifique que $y = C_1x + C_2x^2 + 3x^2e^x - 6xe^x$ es solución de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^4e^x.$$

---

2. **[15 pts]** Encuentre la solución general de la EDO dada.

   (a) [6 pts] $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^4+6}{xy^3}$. (Ecuación separable)

   (b) [9 pts] $2x\dfrac{dy}{dx} + y = \sqrt{x^5}e^{x^3}$. (Ecuación lineal de primer orden)

---

3. **[10 pts]** Determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si es exacta, resuélvala.

$$(\ln y - 1)\,dx + \left(1 + \ln y + \frac{x}{y}\right)dy = 0.$$

---

4. **[15 pts]** Elvin tiene invertidos actualmente \$40 000 en un fondo de mercado de dinero, que gana 3% anual capitalizado continuamente. Las condiciones del mercado están mejorando y él decide transferir continuamente 15% de su cuenta a un fondo de acciones que gana 12% anual. Él también retira \$6 000 al año de su fondo de mercado para gastos.

   (a) [10 pts] Plantee y resuelva una pareja de ecuaciones diferenciales acopladas para determinar la cantidad de dinero en cada cuenta dentro de t años.

   (b) [3 pts] ¿Cuánto tardará el fondo de mercado en agotarse?

   (c) [2 pts] ¿Cuánto dinero habrá en el fondo de acciones en el momento de agotarse el fondo de mercado?

Tiempo máximo: 110 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario de la fila B
Final 201730

① $y = C_1x + C_2x^2 + 3x^2e^x - 6xe^x$

$y' = C_1 + 2C_2x - 6e^x + 3x^2e^x$

$y'' = 2C_2 - 6e^x + 6xe^x + 3x^2e^x$

Entonces,

$x^2y'' - 2xy' + 2y$

$= 2C_2x^2 - 6x^2e^x + 6x^3e^x + 3x^4e^x$

$- 2C_1x - 4C_2x^2 + 12xe^x - 6x^3e^x$

$+ 2C_1x + 2C_2x^2 + 6x^2e^x - 12xe^x$

$= 3x^4e^x$

② a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^4+6}{xy^3}$

$$\int \frac{y^3}{y^4+6} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

$$\frac{1}{4}\ln(y^4+6) = \ln x + C.$$

b) $2x\dfrac{dy}{dx} + y = x^{5/2}e^{x^3}$

i) Forma estándar

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x}y = \underbrace{\frac{1}{2}x^{3/2}e^{x^3}}_{f(x)}$$

ii) Factor integrante

$$I(x) = e^{\int \frac{1}{2x}dx} = x^{1/2}$$

iii) $\displaystyle\int I(x)f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int x^2e^{x^3}dx$

$$= \frac{1}{6}e^{x^3} + C$$

iv) Solución general

$$y(x) = \frac{1}{x^{1/2}}\left[\frac{1}{6}e^{x^3} + C\right]$$

③ $\underbrace{(\ln y - 1)}_{M}dx + \underbrace{\left(1 + \ln y + \frac{x}{y}\right)}_{N}dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{y} \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y}$$

Dado que $M_y = N_x$, entonces la EDO es exacta. Existe $f(x,y)$ tal que

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = \ln y - 1}_{} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + \ln y + \frac{x}{y}$$

↓ integramos con respecto a x

$$f(x,y) = x\ln y - x + g(y)$$

Ahora bien,

$$1 + \ln y + \frac{x}{y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \frac{x}{y} + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 1 + \ln y$$

$$g(y) = \int (1+\ln y)\,dy + C = y + y\ln y - y + C = y\ln y + C.$$

La solución general de la EDO es

$$x\ln y - x + y\ln y = C.$$

④ Sean $V(t)$ y $F(t)$ los saldos en el fondo de mercado y en el fondo de acciones, respectivamente, después de t años. Entonces,

a) $\dfrac{dV}{dt} = 0{,}03V - 0{,}15V - 6000$; $V(0) = 40000$

$\dfrac{dF}{dt} = 0{,}15V + 0{,}12F$; $F(0) = 0$.

(i) $\dfrac{dV}{dt} + 0{,}12V = -6000$; $V(0) = 40\,000$.

La solución del anterior PVI es

$$V(t) = 90000e^{-0{,}12t} - 50000$$

(ii) Entonces

$$\frac{dF}{dt} = 0{,}15\left(90000e^{-0{,}12t} - 50000\right) + 0{,}12F \ ; \ F(0) = 0.$$

En consecuencia,

$$\frac{dF}{dt} - 0{,}12F = 13500\, e^{-0{,}12t} - 7500 \; ; \; F(0) = 0$$

La solución del anterior PVI es

$$F(t) = 62500 - 56250\, e^{-0{,}12t} - 6250\, e^{0{,}12t}.$$

b) Debemos resolver la ecuación

$$V(t) = 0$$

esto es,

$$90000\, e^{-0{,}12t} - 50000 = 0.$$

Tenemos,

$$t = \frac{1}{-0{,}12} \ln \frac{50000}{90000} \approx 4{,}89$$

c) La cantidad de dinero que hay en el fondo de acciones una vez agotado el fondo de acciones de mercado es

$$F(t) = 62500 - 56250\, e^{-0{,}12 \cdot 4{,}89} - 6250\, e^{0{,}12 \cdot 4{,}89}$$

$$\approx 19980{,}25$$