Departamento de Matemáticas y Estadística
Examen Final de Cálculo III ANEC 201810
Fila A
Mayo 22 de 2018

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

1. **[10 pts]** Verifique que $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} + 6e^x$ es solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 7y' + 10y = 24e^x.$$

---

2. **[15 pts]** Encuentre la solución general de la EDO dada.

   (a) [6 pts] $\dfrac{dy}{dx} = e^{-2y}(x-2)^9$.

   (b) [9 pts] $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = (\sqrt{x}+1)x$.

---

3. **[10 pts]** Considere la siguiente ecuación diferencial

$$(1+xy)\,dx + \left(\frac{x}{y} + x^2\right)dy = 0.$$

   (a) [2 pts] Demuestre que la EDO no es exacta.

   (b) [3 pts] Verifique que un factor integrante para la EDO es $\mu(y) = y$.

   (c) [5 pts] Determine la solución general de la EDO.

---

4. **[15 pts]** Un padre quiere celebrar la fiesta de graduación de su hija dentro de 3 años, para ello necesita \$10 000 dólares. Su padre realiza un depósito inicial A en una cuenta de ahorro que gana 4% de interés anual, capitalizado continuamente. La madre quiere ayudar haciendo depósitos anuales de \$1 000 dólares. ¿Cuál debe ser A para que haya fiesta?

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila A

① $y' = 2C_1e^{2x} + 5C_2e^{5x} + 6e^{x}$

$y'' = 4C_1e^{2x} + 25C_2e^{5x} + 6e^{x}$

Entonces

$y'' - 7y' + 10y$

$= 4C_1e^{2x} + 25C_2e^{5x} + 6e^{x}$

$-14C_1e^{2x} - 35C_2e^{5x} - 42e^{x}$

$10C_1e^{2x} + 10C_2e^{5x} + 60e^{x}$

$= 24e^{x}$

② a) $\int e^{2y}dy = \int (x-2)^9 dx$

$\frac{1}{2}e^{2y} = \frac{1}{10}(x-2)^{10} + C$

b) Paso 1: Forma estándar

$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \sqrt{x} + 1$

Paso 2. Factor integrante

$I = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$

Paso 3.

$\int x^2(\sqrt{x}+1)\,dx = \int x^2(x^{1/2}+1)\,dx$

$= \int (x^{5/2} + x^2)\,dx$

$= \frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{1}{3}x^3 + C.$

Paso 4. La fórmula general está dada por

$y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{1}{3}x^3 + C\right)$

$= \frac{2}{7}x^{3/2} + \frac{1}{3}x + Cx^{-2}$

③ $\underbrace{(1+xy)}_{M}dx + \underbrace{\left(\frac{x}{y} + x^2\right)}_{N}dy = 0$

a) $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y} + 2x \ \wedge \ \frac{\partial M}{\partial y} = x$. Como $N_x \neq M_y$, entonces la EDO no es exacta.

b) $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{\frac{1}{y} + 2x - x}{1+xy} = \frac{\frac{1}{y} + x}{1+xy} = \frac{\frac{1+xy}{y}}{1+xy} = \frac{1}{y}$

Un factor integrante para la EDO es,

$e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln y} = y.$

c) Multiplicando la ecuación por el factor integrante, tenemos

$\underbrace{(y + xy^2)}_{M^*}dx + \underbrace{(x + x^2y)}_{N^*}dy = 0 \quad (*)$

$\frac{\partial M^*}{\partial y} = 1 + 2xy \ \wedge \ \frac{\partial N^*}{\partial x} = 1 + 2xy$

Dado que la ecuación (*) es exacta, entonces existe $f(x,y)$ tal que

$f_x = y + xy^2 \ \wedge \ f_y = x + x^2y$

integrando con respecto a x.

$f(x,y) = \int (y + xy^2)\,dx + g(y)$

$= xy + \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y)$

Ahora bien,

$x + x^2y = f_y$

$= x + x^2y + g'(y)$

$\rightarrow g'(y) = 0 \rightarrow g(y) = C.$

La solución general de la EDO está dada por

$xy + \frac{1}{2}x^2y^2 = C.$

④ Sea $V(t)$ el saldo en la cuenta de ahorro en función del tiempo t (años).

$$V(3) = 10000$$
$$V(0) = A$$

$$\frac{dv}{dt} = 0{,}04V + 1000.$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} \underbrace{-0{,}04}_{p(t)} V = \underbrace{1000}_{q(t)}.$$

- factor integrante: $I = e^{\int p(t)dt} = e^{\int -0{,}04dt} = e^{-0{,}04t}$
- $\int I\, q(t)\, dt = \int 1000\, e^{-0{,}04t} dt = \frac{1000}{-0{,}04} e^{-0{,}04t} = -25000 e^{-0{,}04t} + C$
- la solución general de la EDO está dada por

$$V(t) = \frac{1}{I}\left[\int I q(t)\, dt + c\right]$$
$$= e^{0{,}04t}\left(-25000 e^{-0{,}04t} + C\right)$$
$$= -25000 + c e^{0{,}04t}$$

Como $V(0) = A$, entonces

$$A = V(0) = -25000 + C \Rightarrow C = A + 25000.$$

Así,

$$V(t) = -25000 + (A + 25000)e^{0{,}04t}.$$

Como $V(3) = 10000$, entonces.

$$10000 = V(3) = -25000 + (A+25000)e^{0{,}04 \cdot 3}$$

$$\Rightarrow \frac{10000 + 25000}{e^{0{,}12}} - 25000 = A.$$

Luego,

$$A \approx 6042{,}215.$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Examen Final de Cálculo III ANEC 201810
Fila B
Mayo 22 de 2018

Nombre completo:________________________________Código:________________________________

1. **[10 pts]** Verifique que $y = C_1e^{3x} + C_2e^{5x} + 3e^x$ es solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 8y' + 15y = 24e^x.$$

---

2. **[15 pts]** Encuentre la solución general de la EDO dada.

   (a) [6 pts] $\dfrac{dy}{dx} = e^{3y}(x+3)^8$.

   (b) [9 pts] $x\dfrac{dy}{dx} + 3y = (\sqrt[3]{x} + 1)x$.

---

3. **[10 pts]** Considere la siguiente ecuación diferencial

$$\left(\frac{y}{x} + y^2\right) dx + (1 + xy)\, dy = 0.$$

   (a) [2 pts] Demuestre que la EDO no es exacta.

   (b) [3 pts] Verifique que un factor integrante para la EDO es $\mu(x) = x$.

   (c) [5 pts] Determine la solución general de la EDO.

---

4. **[15 pts]** Una madre quiere celebrar la fiesta de graduación de su hijo dentro de 3 años, para ello necesita \$8 000 dólares. Su madre realiza un depósito inicial A en una cuenta de ahorro que gana 5% de interés anual, capitalizado continuamente. El padre quiere ayudar haciendo depósitos anuales de \$1 000 dólares. ¿Cuál debe ser A para que haya fiesta?

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila B

① $y' = 3C_1 e^{3x} + 5C_2 e^{5x} + 3e^{x}$

$y'' = 9C_1 e^{3x} + 25C_2 e^{5x} + 3e^{x}$

Entonces,

$y'' - 8y' + 15y$

$= 9C_1 e^{3x} + 25C_2 e^{5x} + 3e^{x}$

$-24C_1 e^{3x} - 40C_2 e^{5x} - 24e^{x}$

$15C_1 e^{3x} + 15C_2 e^{5x} + 45e^{x}$

$= 24e^{x}.$

② a) $\int e^{-3y} dy = \int (x+3)^8 dx$

$-\frac{1}{3} e^{-3y} = \frac{1}{9}(x+3)^9 + C$

b) Paso 1. Forma estándar

$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x} y = \sqrt[3]{x} + 1$

Paso 2. Factor integrante

$I = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3\ln x} = x^3$

Paso 3

$\int x^3(\sqrt[3]{x}+1)dx = \int x^3(x^{1/3}+1)dx$

$= \int (x^{10/3} + x^3) dx$

$= \frac{3}{13} x^{13/3} + \frac{1}{4} x^4 + C$

Paso 4 La fórmula general está dada por

$y = \frac{1}{x^3}\left(\frac{3}{13} x^{13/3} + \frac{1}{4} x^4 + C\right)$

$= \frac{3}{13} x^{4/3} + \frac{1}{4} x + C x^{-3}$

③ $\underbrace{\left(\frac{y}{x} + y^2\right)}_{M} dx + \underbrace{(1+xy)}_{N} dy = 0.$

a) $\frac{\partial N}{\partial x} = y \wedge \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} + 2y.$ Como $N_x \neq M_y$, entonces la EDO no es exacta.

b) $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\frac{1}{x} + 2y - y}{1+xy} = \frac{\frac{1}{x} + y}{1+xy} = \frac{\frac{1+xy}{x}}{1+xy} = \frac{1}{x}$

Un factor integrante para la EDO es,

$e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x.$

c) multiplicando la ecuación por el factor integrante, tenemos

$\underbrace{(y + xy^2)}_{M^*} dx + \underbrace{(x + x^2 y)}_{N^*} dy = 0 \quad (*)$

$\frac{\partial M^*}{\partial y} = 1 + 2xy \wedge \frac{\partial N^*}{\partial x} = 1 + 2xy$

Dado que la ecuación (*) es exacta, entonces existe $f(x,y)$ tal que

$f_x = y + xy^2 \wedge \underbrace{f_y = x + x^2 y}$

integrando con respecto a y

$f(x,y) = \int (x + x^2 y) dy + g(x)$

$= xy + \frac{1}{2} x^2 y^2 + g(x)$

Ahora bien,

$y + xy^2 = f_x$

$= y + xy^2 + g'(x)$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = C.$

La solución general de la EDO está dada por

$xy + \frac{1}{2} x^2 y^2 = C.$

④ Sea $V(t)$ el saldo en la cuenta de ahorro en función del tiempo t (años)

$$V(3) = 8000$$
$$V(0) = A$$

$$\frac{dv}{dt} = 0{,}05V + 1000$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} \underbrace{-0{,}05}_{p(t)} V = \underbrace{1000}_{g(t)}$$

- factor integrante: $I = e^{\int p(t)dt} = e^{\int -0{,}05 dt} = e^{-0{,}05t}$
- $\int I\, g(t)dt = \int 1000 \cdot e^{-0{,}05t} dt = \frac{1000}{-0{,}05} e^{-0{,}05t} = -20000 e^{-0{,}05t} + C$
- La solución general de la EDO está dada por

$$V(t) = \frac{1}{I}\left[\int I\, g(t)dt + C\right]$$
$$= e^{0{,}05t}\left[-20000 e^{-0{,}05t} + C\right]$$
$$= -20000 + Ce^{0{,}05t}.$$

Como $V(0) = A$, entonces

$$A = V(0) = -20000 + C \Rightarrow C = A + 20000$$

Así,

$$V(t) = -20000 + (A + 20000)e^{0{,}05t}$$

Como $V(3) = 8000$, entonces

$$8000 = V(3) = -20000 + (A + 20000)e^{0{,}05 \cdot 3}$$

$$\Rightarrow \frac{8000 + 20000}{e^{0{,}15}} - 20000 = A.$$

Luego,

$$A \approx 4099{,}823$$

Scanned by CamScanner