UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 201830
Fila A
Noviembre 20 de 2018

Nombre completo:________________________Código:________________________

1. **[15 pts]** Encuentre la solución general de la siguiente *ecuación de variables separables.*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\sqrt{x^2+4}}{e^{3y}}.$$

---

2. **[20 pts]** Resuelva la ecuación diferencial dada.

$$6xydx + \left(4y + 9x^2\right) dy = 0.$$

   (a) [5 pts] Demuestre que la EDO no es exacta.
   (b) [5 pts] Verifique que un factor integrante para la EDO es $\mu(y) = y^2$.
   (c) [10 pts] Determine la solución general de la EDO.

---

3. **[15 pts]** Alonzo deposita \$10 000 en una cuenta en la que se acumula interés a una tasa de 4% anual, capitalizado continuamente. Alonzo planea retirar \$2 000 por año.

   (a) [10 pts] Plantee y resuelva una ecuación diferencial para determinar el saldo $S(t)$ de la cuenta t años después del depósito inicial.
   (b) [5 pts] ¿Cuánto tardará la cuenta en agotarse?

Tiempo máximo: 80 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila A

① $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x\sqrt{x^2+4}}{e^{3y}}$

$$\underbrace{\int e^{3y}\,dy}_{I_1} = \underbrace{\int 2x\sqrt{x^2+4}\,dx}_{I_2}$$

- $I_1 = \frac{1}{3}e^{3y} + C_1$
- $I_2 = \int 2x\sqrt{x^2+4}\,dx$

$u = x^2+4 \quad du = 2x\,dx$

$$I_2 = \int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C_2 = \frac{2}{3}(x^2+4)^{3/2} + C_2.$$

La solución general de la ED es

$$\frac{1}{3}e^{3y} = \frac{2}{3}(x^2+4)^{3/2} + C.$$

② $\underbrace{6xy}_{M}\,dx + \underbrace{(4y+9x^2)}_{N}\,dy = 0 \quad (*)$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 6x \quad \wedge \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 18x.$

La EDO no es exacta.

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{18x - 6x}{6xy} = \frac{2}{y}$$

$$\rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln y} = y^2$$

multiplicando $(*)$ por $\mu(y) = y^2$ se tiene

$$\underbrace{6xy^3}_{M^+}\,dx + \underbrace{(4y^3+9x^2y^2)}_{N^+}\,dy = 0 \quad (**)$$

$\dfrac{\partial M^+}{\partial y} = 18xy^2 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial N^+}{\partial x} = 18xy^2$

La ED $(**)$ es exacta, entonces existe $f(x,y)$ tal que

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3}_{} \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 9x^2y^2$$

integrando con respecto a x

$$f(x,y) = \int 6xy^3\,dx + g(y) = 3x^2y^3 + g(y)$$

Ahora bien,

$$4y^3 + 9x^2y^2 = \frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2 + g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = 4y^3 \Rightarrow g(y) = \int 4y^3\,dy = y^4 + C.$$

Luego,

$$f(x,y) = 3x^2y^3 + y^4 + C.$$

La solución general de la EDO está dada por

$$3x^2y^3 + y^4 = C.$$

(3) Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta t años después del depósito inicial, entonces

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}04S - 2000 \quad \wedge \quad S(0) = 10000$$

(a)

Paso 1. Forma estándar

$$\frac{dS}{dt} \underbrace{- 0{,}04}_{p(t)} S = \underbrace{-2000}_{q(t)}.$$

Paso 2. Factor integrante

$$I = e^{\int p(t)\,dt}$$

$$= e^{\int -0{,}04\,dt} = e^{-0{,}04t}$$

Paso 3. Resolver la integral

$$\int I\,q(t)\,dt = \int e^{-0{,}04t} \cdot (-2000)\,dt$$

$$= \frac{-2000}{-0{,}04} e^{-0{,}04t}$$

$$= 50000\, e^{-0{,}04t}$$

Paso 4. Solución general

$$S(t) = \frac{1}{I}\left[\int I\,q(t)\,dt + C\right]$$

$$= \frac{1}{e^{-0{,}04t}}\left[50000\, e^{-0{,}04t} + C\right]$$

$$= 50000 + C\, e^{0{,}04t}.$$

Dado que $S(0) = 10000$, entonces

$$10000 = S(0) = 50000 + C$$

$$C = -40000$$

Luego,

$$S(t) = 50000 - 40000\, e^{0{,}04t}$$

(b) La cuenta se agota cuando

$$S(t) = 0$$

esto es,

$$50000 - 40000\, e^{0{,}04t} = 0.$$

$$50000 = 40000\, e^{0{,}04t}.$$

$$\frac{5}{4} = e^{0{,}04t}.$$

$$\ln \frac{5}{4} = 0{,}04t$$

$$\rightarrow t = \frac{1}{0{,}04} \ln \frac{5}{4}$$

$$\approx 5{,}6.$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 201830
Fila B
Noviembre 20 de 2018

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. **[15 pts]** Encuentre la solución general de la siguiente *ecuación de variables separables*.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2\sqrt{x^3+5}}{e^{4y}}.$$

---

2. **[20 pts]** Resuelva la ecuación diferencial dada.

$$\left(4x + 9y^2\right) dx + 6xydy = 0.$$

(a) [5 pts] Demuestre que la EDO no es exacta.

(b) [5 pts] Verifique que un factor integrante para la EDO es $\mu(x) = x^2$.

(c) [10 pts] Determine la solución general de la EDO.

---

3. **[15 pts]** Alonzo deposita \$12 000 en una cuenta en la que se acumula interés a una tasa de 5% anual, capitalizado continuamente. Alonzo planea retirar \$3 000 por año.

(a) [10 pts] Plantee y resuelva una ecuación diferencial para determinar el saldo $S(t)$ de la cuenta t años después del depósito inicial.

(b) [5 pts] ¿Cuánto tardará la cuenta en agotarse?

Tiempo máximo: 80 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila B

① $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2\sqrt{x^3+5}}{e^{4y}}$

$$\underbrace{\int e^{4y}\,dy}_{I_1} = \underbrace{\int 3x^2\sqrt{x^3+5}\,dx}_{I_2}$$

• $I_1 = \frac{1}{4}e^{4y} + c_1$

• $I_2 = \int 3x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$

$u = x^3+5 \quad du = 3x^2\,dx$

$$I_2 = \int u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + c_2$$

$$= \frac{2}{3}(x^3+5)^{3/2} + c_2$$

La solución general de la ED es

$$\frac{1}{4}e^{4y} = \frac{2}{3}(x^3+5)^{3/2} + C$$

② $\underbrace{(4x+9y^2)}_{M}dx + \underbrace{6xy}_{N}\,dy = 0$ (*)

$\frac{\partial M}{\partial y} = 18y \wedge \frac{\partial N}{\partial x} = 6y$

La EDO no es exacta

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{18y-6y}{6xy} = \frac{2}{x}$$

$\rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$

multiplicando (*) por $\mu(x) = x^2$ se tiene

$$\underbrace{(4x^3+9x^2y^2)}_{M^*}dx + \underbrace{6x^3y}_{N^*}\,dy = 0 \quad (**)$$

$\frac{\partial M^*}{\partial y} = 18x^2y \wedge \frac{\partial N^*}{\partial x} = 18x^2y$

La ED (**) es exacta, entonces existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3+9x^2y^2 \wedge \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y}$$

integrando con respecto a y.

$$f(x,y) = \int 6x^3y\,dy + g(x)$$

$$= 3x^3y^2 + g(x)$$

Ahora bien,

$$4x^3+9x^2y^2 = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$= 9x^2y^2 + g'(x)$$

$\Rightarrow g'(x) = 4x^3 \Rightarrow g(x) = \int 4x^3\,dx$

$$= x^4 + C$$

Luego,

$$f(x,y) = 3x^3y^2 + x^4 + C$$

La solución general de la EDO está dada por

$$3x^3y^2 + x^4 = C.$$

③ Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta t años después del depósito inicial, entonces

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}05S - 3000 \quad \wedge \quad S(0) = 12000$$

ⓐ

Paso 1. Forma estándar

$$\frac{dS}{dt} \underbrace{-0{,}05}_{p(t)} S = \underbrace{-3000}_{q(t)}$$

Paso 2. Factor integrante

$$I = e^{\int p(t)\,dt}$$

$$= e^{\int -0{,}05\,dt} = e^{-0{,}05t}$$

Paso 3. Resolver la integral

$$\int I q(t)\,dt = \int e^{-0{,}05t} \cdot (-3000)\,dt$$

$$= \frac{-3000}{-0{,}05} e^{-0{,}05t}$$

$$= 60000 e^{-0{,}05t}$$

Paso 4. Solución general

$$S(t) = \frac{1}{I}\left[\int I q(t)\,dt + C\right]$$

$$= \frac{1}{e^{-0{,}05t}}\left[60000 e^{-0{,}05t} + C\right]$$

$$= 60000 + C e^{0{,}05t}$$

Dado que $S(0) = 12000$, entonces

$$12000 = S(0) = 60000 + C$$

$$C = -48000$$

Luego,

$$S(t) = 60000 - 48000 e^{0{,}05t}$$

ⓑ La cuenta se agota cuando

$$S(t) = 0$$

esto es,

$$60000 - 48000 e^{0{,}05t} = 0.$$

$$60000 = 48000 e^{0{,}05t}$$

$$\frac{5}{4} = e^{0{,}05t}$$

$$\ln\frac{5}{4} = 0{,}05t$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{0{,}05} \ln\frac{5}{4}$$

$$\approx 4{,}5$$