UNIVERSIDAD DEL NORTE.
Departamento de Matemáticas y Estadística.
Examen final de Algebra Lineal.
Mayo 29 de 2018
Fila A

Nombre	Profesor

Observaciones.

Responda el punto I en la hoja de preguntas. No requiere justificación.
En los puntos II,III y IV justifique sus procedimientos.
Valoración: Punto I (2.0/5.0), puntos II, III y IV (1.0/5.0 cada uno.)
No está permitido el uso de dispositivos electrónicos como celulares, audífonos, relojes y calculadoras.
No hay preguntas.
Tiempo máximo: 1 hora 45 minutos.

I. En cada caso, elija (marque con X o encierre en un círculo) la (única) opción correcta. (N.A. es ninguna de las anteriores).

1. Si a es un real tal que $P(a, a^2 + 1, a + 3)$ está en el octante V, entonces
   (a.) $a > -1$ •(b.) $-3 < a < 0$. (c.) $-3 < a < -1$. (d.) N.A.

2. Los puntos $P(1, 1, 2), Q(2, 2, 4)$ y $R(3, 2, 1)$ son
   (a.) Colineales. •(b.) Vértices de un triángulo isósceles.
   (c.) Vértices de un triángulo rectángulo. (d.) N.A.

3. El ángulo entre los vectores $v = (1, -1, 2, 3)$ y $w = (2, 1, 3, -5)$ es
   (a.) Recto. (b.) Agudo. (c.) Negativo. •(d.) N.A.

4. Una ecuación vectorial para el plano de ecuación cartesiana $x + 5y - 4z = 3$ es:
   (a.) $(x, y, z) = (3 + 4t + s, 5s, t - 4s)$. •(b.) $(x, y, z) = (2 - t + 4s, 1 + t, 1 + t + s)$.
   (c.) $(x, y, z) = (-7 + t, 2 + 5t + 4s, -4t + 5s)$. (d.) N.A.

5. Si $P(1, 1, 2)$ y $Q(10, 10, 17)$, las coordenadas de los puntos que dividen a $\overline{PQ}$ en tres partes iguales son
   (a.) $(3, 3, 5)$ y $(6, 6, 10)$. (b.) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{17}{3}\right)$.
   •(c.) $(4, 4, 7)$ y $(7, 7, 12)$. (d.) N.A.

6. Los vectores $v = (1, 2, 3), w = (-1, 4, 5)$ y $u = (1, 8, 11)$ son
   (a.) l.i (b.) Generadores de un subespacio de dimensión 3. •(c.) l.d. (d.) N.A.

7. Si S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que contiene al vector nulo entonces
   (a.) S es un subespacio. (b.) $S^\perp = \mathbb{R}^n$. (c.) S es l.i. •(d.) N.A.

8. Si $S = \{(1,2,3), (-2,-4,-6), (3,1,5)\}$, el complemento ortogonal de S tiene dimensión
   •(a.) 1 (b.) 2. (c.) 3 (d.) N.A.

9. Un punto del plano con ecuación vectorial $(x,y,z) = (2+t-s, 3+t-2s, t-2s)$ es:
   •(a.) $P(2,2,-1)$. (b.) $Q(1,1,1)$. (c.) $R(-1,2,-3)$. (d.) N.A.

10. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, el subespacio generado por las columnas de A tiene dimensión:
    (a.) 3. •(b) 2. (c). 1. (d.) N.A.

II. Considere los puntos $P(1,1,2), Q(2,3,5), R(-1,4,6)$.

1. Muestre que los puntos dados no son colineales y encuentre una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana para el plano único que los contiene.
   SOLUCIÓN.
   $\overrightarrow{PQ} = (1,2,3), \overrightarrow{PR} = (-2,3,4)$ no son múltiplos escalares, por lo que no son paralelos y, en consecuencia, los puntos dados no son colineales.
   Una ecuación vectorial para el plano que contiene a los tres puntos dados es, por ejemplo,
   $$(x,y,z) = (1,1,2) + t(1,2,3) + s(-2,3,4), t, s \in \mathbb{R}.$$
   También puede reemplazarse $(1,1,2)$ por las coordenadas de Q o R.
   Tenemos que $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-1,-10,7)$. Así, una normal es $(1,10,-7)$ y una ecuación cartesiana es
   $$\begin{aligned} (1,10,-7) \bullet (x,y,z) &= (1,10,-7) \bullet (1,1,2) \\ x + 10y - 7z &= -3 \end{aligned}$$

2. Determine perímetro y área del triángulo con vértices en los puntos dados.
   SOLUCIÓN.
   Tenemos que $\overrightarrow{QR} = (-3,1,1)$. Luego el perímetro del triángulo es
   $$\|\overrightarrow{PQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{14} + \sqrt{29} + \sqrt{11}.$$
   Por otra parte el área es
   $$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \frac{1}{2}\sqrt{150} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

III. Sea $A = \begin{pmatrix} -14 & -30 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$, determine los valores y vectores propios de A. ¿Es A diagonalizable?.

SOLUCIÓN.

El polinomio característico de A es

$$\begin{vmatrix} \lambda + 14 & 30 \\ -6 & \lambda - 13 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 182 + 180 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1),$$

de modo que los valores propios son $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$.
Los subespacios propios correspondientes son los conjuntos soluciones de los sistemas homogéneos con matrices ampliadas

$$\left(\begin{array}{rr|r} 12 & 30 & 0 \\ -6 & -15 & 0 \end{array}\right) \text{ y } \left(\begin{array}{rr|r} 15 & 30 & 0 \\ -6 & -12 & 0 \end{array}\right).$$

Para el primer caso, tenemos la ecuación homogénea $2x + 5y = 0$, para el segundo es $x + 2y = 0$. Tenemos así:

$$\begin{array}{rcl} V(A,-2) & = & \{t(-5,2) | t \in \mathbb{R}\} = \langle(-5,2)\rangle \\ V(A,1) & = & \{(-2t,t) | t \in \mathbb{R}\} = \langle(-2,1)\rangle \end{array}$$

Puesto que $(-5,2)$ y $(-2,1)$ no son múltiplos escalares, son l.i y forman una base para $\mathbb{R}^2$. En consecuencia, A es diagonalizable.

IV. Encuentre una base para el espacio solución del sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 & = & 0 \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

¿ Cuál es la dimensión? Justifique su respuesta.
SOLUCIÓN.
Resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 7 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{-5F_1+F_3 \\ -1F_2}}{\overset{-2F_1+F_2}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{4F_2+F_3}{\overset{-1F_2+F_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto el espacio solución es

$$S = \{(-t-s, -2t+s, t, s) | t, s \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,-2,1,0), (-1,1,0,1)\rangle.$$

Puesto que los vectores generadores son l.i, $B = \{(-1,-2,1,0), (-1,1,0,1)\}$ es una base para S. Así $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$.

UNIVERSIDAD DEL NORTE.
Departamento de Matemáticas y Estadística.
Examen final de Algebra Lineal.
Mayo 29 de 2018
Fila B

Nombre	Profesor

Observaciones.

Responda el punto I en la hoja de preguntas. No requiere justificación.
En los puntos II,III y IV justifique sus procedimientos.
Valoración: Punto I (2.0/5.0), puntos II, III y IV (1.0/5.0 cada uno.)
No está permitido el uso de dispositivos electrónicos como celulares, audífonos, relojes y calculadoras.
No hay preguntas.
Tiempo máximo: 1 hora 45 minutos.

I. En cada caso, elija (marque con X o encierre en un círculo) la (única) opción correcta. (N.A. es ninguna de las anteriores).

1. Si a es un real tal que $P(a, a^2+1, a+3)$ está en el octante V, entonces
   (a.) $a > -1$ (b.) $-3 < a < -1$. •(c.) $-3 < a < 0$. (d.) N.A.

2. Los puntos $P(1,1,2), Q(2,2,4)$ y $R(3,2,1)$ son
   (a.) Colineales. (b.) Vértices de un triángulo rectángulo.
   •(c.) Vértices de un triángulo isósceles. (d.) N.A.

3. El ángulo entre los vectores $v = (1,-1,2,3)$ y $w = (2,1,3,-5)$ es
   (a.) Recto. (b.) Agudo. (c.) Negativo. •(d.) N.A.

4. Una ecuación vectorial para el plano de ecuación cartesiana $x + 5y - 4z = 3$ es:
   •(a.) $(x,y,z) = (2-t+4s, 1+t, 1+t+s)$. (b.)$(x,y,z) = (3+4t+s, 5s, t-4s)$.
   (c.) $(x,y,z) = (-7+t, 2+5t+4s, -4t+5s)$. (d.) N.A.

5. Si $P(1,1,2)$ y $Q(10,10,17)$, las coordenadas de los puntos que dividen a $\overline{PQ}$ en tres partes iguales son
   (a.) $(3,3,5)$ y $(6,6,10)$. •(b.) $(4,4,7)$ y $(7,7,12)$.
   (c.)$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{17}{3}\right)$. (d.) N.A.

6. Los vectores $v = (1,2,3), w = (-1,4,5)$ y $u = (1,8,11)$ son
   •(a.) l.d (b.) Generadores de un subespacio de dimensión 3. (c.) l.i. (d.) N.A.

7. Si S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que contiene al vector nulo entonces
   (a.) S es un subespacio. (b.) $S^{\perp} = \mathbb{R}^n$. (c.) S es l.i. •(d.) N.A.

8. Si $S = \{(1,2,3), (-2,-4,-6), (3,1,5)\}$, el complemento ortogonal de S tiene dimensión
(a.) 2 $\qquad$ •(b.) 1. $\qquad$ (c.) 3 $\qquad$ (d.) N.A.

9. Un punto del plano con ecuación vectorial $(x,y,z) = (2+t-s, 3+t-2s, t-2s)$ es:
(a.) $Q(1,1,1)$. $\qquad$ •(b.)$P(2,2,-1)$. $\qquad$ (c.) $R(-1,2,-3)$. $\qquad$ (d.) N.A.

10. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, el subespacio generado por las columnas de A tiene dimensión:
(a.) 3. $\qquad$ (b) 1. $\qquad$ •(c). 2. $\qquad$ (d.) N.A.

II. Considere los puntos $P(1,1,2), Q(-1,4,6), R(2,3,5)$.

1. Muestre que los puntos dados no son colineales y encuentre una ecuación vectorial y una ecuación cartesiana para el plano único que los contiene.

SOLUCIÓN.
$\overrightarrow{PR} = (1,2,3), \overrightarrow{PQ} = (-2,3,4)$ no son múltiplos escalares, por lo que no son paralelos y, en consecuencia, los puntos dados no son colineales.
Una ecuación vectorial para el plano que contiene a los tres puntos dados es, por ejemplo,

$$(x,y,z) = (1,1,2) + t(-2,3,4) + s(1,2,3), t, s \in \mathbb{R}.$$

También puede reemplazarse $(1,1,2)$ por las coordenadas de Q o R.
Tenemos que $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (1,10,-7)$. Así, una normal es $(1,10,-7)$ y una ecuación cartesiana es

$$\begin{aligned} (1,10,-7) \bullet (x,y,z) &= (1,10,-7) \bullet (1,1,2) \\ x + 10y - 7z &= -3 \end{aligned}$$

2. Determine perímetro y área del triángulo con vértices en los puntos dados.
SOLUCIÓN.
Tenemos que $\overrightarrow{QR} = (3,-1,-1)$. Luego el perímetro del triángulo es

$$\|\overrightarrow{PQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{29} + \sqrt{14} + \sqrt{11}.$$

Por otra parte el área es

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \frac{1}{2}\sqrt{150} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

III. Sea $A = \begin{pmatrix} -14 & 30 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$, determine los valores y vectores propios de A. ¿Es A diagonalizable?.

SOLUCIÓN.
El polinomio característico de A es

$$\begin{vmatrix} \lambda + 14 & -30 \\ 6 & \lambda - 13 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 182 + 180 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1),$$

de modo que los valores propios son $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$.
Los subespacios propios correspondientes son los conjuntos soluciones de los sistemas homogéneos con matrices ampliadas

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12 & -30 & 0 \\ 6 & -15 & 0 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 15 & -30 & 0 \\ 6 & -12 & 0 \end{array}\right).$$

Para el primer caso, tenemos la ecuación homogénea $2x - 5y = 0$, para el segundo es $x - 2y = 0$. Tenemos así:

$$\begin{array}{rcl} V(A, -2) & = & \{t(5,2) | t \in \mathbb{R}\} = \langle (5,2) \rangle \\ V(A, 1) & = & \{(2t, t) | t \in \mathbb{R}\} = \langle (2,1) \rangle \end{array}$$

Puesto que $(5,2)$ y $(2,1)$ no son múltiplos escalares, son l.i y forman una base para $\mathbb{R}^2$. En consecuencia, A es diagonalizable.

IV. Encuentre una base para el espacio solución del sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 & = & 0 \\ 7x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 5x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

¿ Cuál es la dimensión? Justifique su respuesta.
SOLUCIÓN.
Resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 11 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-7F_1 + F_3 \\ -1F_2}]{-2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[5F_2 + F_3]{-1F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto el espacio solución es

$$S = \{(-t - s, -2t + s, t, s) | t, s \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, -2, 1, 0), (-1, 1, 0, 1) \rangle.$$

Puesto que los vectores generadores son l.i, $B = \{(-1, -2, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)\}$ es una base para S. Así $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$.