GEOMETRIA ANALÍTICA

M. Sc. Sebastián Castañeda Hernández

Algebra Lineal
Universidad del Norte

3 de noviembre de 2010

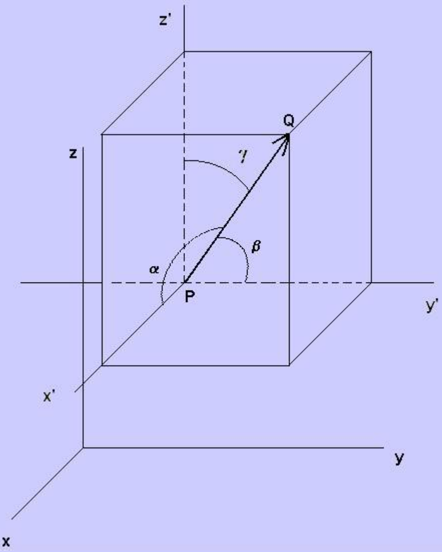
Segmentos dirigidos en $\mathcal{E}_n$.

Suponemos que ya se ha introducido un sistema coordenado en el espacio euclidiano correspondiente e identificaremos, abusando de la escritura, un punto del espacio euclidiano con la $n-$ada, un elemento del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, cuyas componentes son sus coordenadas con relación al sistema coordenado introducido.

Definición

Sean $P, Q \in \mathcal{E}_n$, entonces el par ordenado (P, Q) se denomina un **segmento dirigido** *en $\mathcal{E}_n$.*

Un segmento dirigido (P, Q) puede entonces ser interpretado como un **desplazamiento** en el espacio euclidiano $\mathcal{E}_n$.



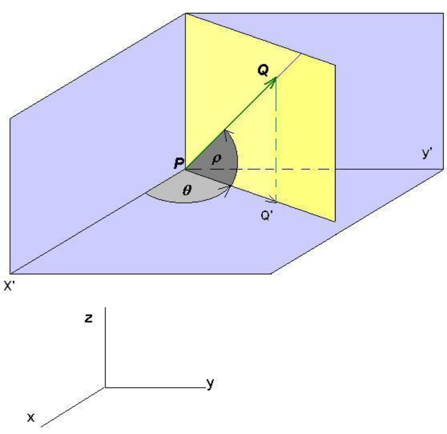


Figura: Ángulos directores.

Segmentos dirigidos equivalentes

Dos segmentos dirigidos se denominarán **equivalentes** si, y sólo si son ambos nulos o, en caso de no serlo, tienen la misma magnitud y dirección. El siguiente teorema caracteriza algebraicamente segmentos equivalentes. . La fórmula para la distancia entre puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ es:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \|Q - P\| \tag{1}$$

la cual nos da así la magnitud del segmento dirigido (P, Q). Escribiremos $(P, Q) \equiv (R, S)$ para indicar que el segmento (P, Q)y el segmento (R, S) son equivalentes.

Teorema

Sean $P, Q, R, S \in \mathcal{E}_n$, entonces $(P, Q) \equiv (R, S)$ si, y sólo si

$$Q - P = S - R \tag{2}$$

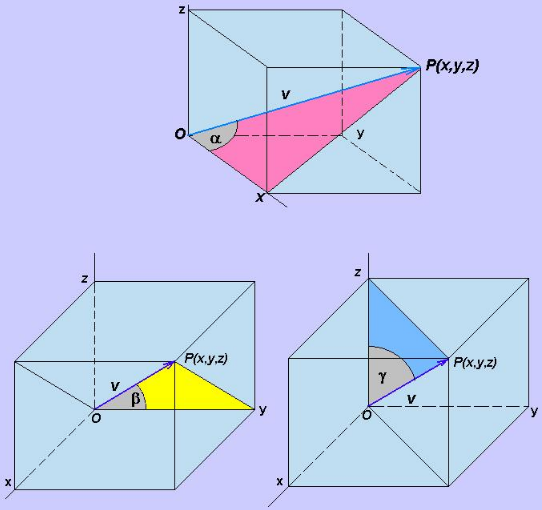


Figura: Ángulos directores en $\mathcal{E}_3$.

Teorema

Sea $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, , $v \neq (0, 0, 0)$. *Si* α, β, γ *son los ángulos directores del representante canónico de* v *(y de cualquier representante) y* $\overline{OP} = d(O, P)$ *es la magnitud de cualquiera de sus representantes, entonces:*

$$
\begin{aligned}
\overline{OP} &= \|v\| \\
&= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} && (3) \\
x &= \|v\| cos(\alpha) && (4) \\
y &= \|v\| cos(\beta) && (5) \\
z &= \|v\| cos(\gamma) && (6) \\
1 &= cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) && (7)
\end{aligned}
$$

En términos algebraicos, la dirección de un vector no nulo, como se definió en el primer capítulo, está dada por el vector unitario direccional. Podemos así definir entonces la dirección de un segmento dirigido no nulo, (P, Q) como la dirección del vector $v = \overrightarrow{PQ} = Q - P \in \mathbb{R}^n$; esto es, como el vector unitario U_v. De igual manera, en el primer capítulo se introdujo, desde un punto de vista algebraico, el concepto de **paralelismo** de vectores. Así, para vectores no nulos $v, w \in \mathbb{R}^n$, v y w son paralelos si, y sólo si $U_w = \pm U_v$. Escribiremos $v \parallel w$, para indicar que v es paralelo a w. En ese sentido, dos segmentos dirigidos no nulos (PQ) y (R, S) se denominarán **paralelos** si y sólo si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ lo son. Tenemos entonces el siguiente teorema, cuya interpretación geométrica es muy clara.

Teorema

Sean $v, w \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$*. Entonces son equivalentes:*

1. $v \parallel w$.
2. *Existe un escalar* $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ *tal que* $w = \lambda v$.
3. *El ángulo entre* v *y* w *es* 0 *o* π.

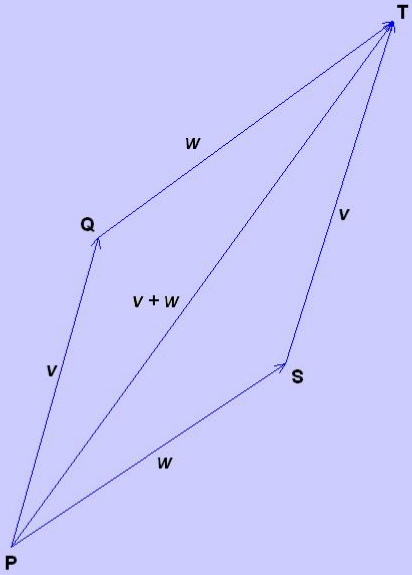
Adición y multiplicación por escalares con segmentos dirigidos

Si (P, Q) y (P, S) son segmentos dirigidos "anclados", o con punto inicial, en P, entonces (P, Q) y (P, S) son representantes de los vectores $Q - P = v$ y $S - P = w$ en $\mathbb{R}^n$. La suma $v + w$ es entonces un vector con una representación (P, T) en $\mathcal{E}_n$, para algún punto T tal que $T - P = v + w$. Si consideramos los segmentos dirigidos (Q, T) y (P, S), tenemos entonces que

$$\begin{aligned} T - Q &= T - P + P - Q \\ &= T - P - (Q - P) \\ &= v + w - v \\ &= w \\ &= S - P, \end{aligned}$$

por lo que $(Q, T) \equiv (P, S)$. También $(P, Q) \equiv (S, T)$.

¿Cuál es el significado geométrico de este resultado?



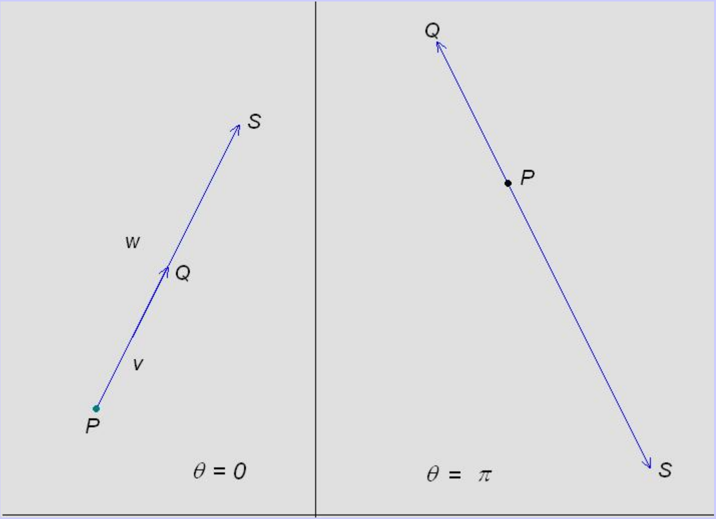


Figura: Vectores paralelos.

Colinealidad y ecuaciones vectoriales de rectas.

Consideremos el caso de tres puntos distintos, P, Q, R en el espacio euclidiano $\mathcal{E}_n$, $n = 2, 3$. Si se toman los segmentos dirigidos (P, Q) y (P, R)[1] entonces P, Q y R serán colineales si, y sólo si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son paralelos; es decir :

P, Q y R son colineales $\iff$, existe $\lambda \neq 0$, tal que $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PR}$.

[1] O cualquier par de segmentos con punto inicial en uno de los puntos y puntos finales en los otros dos.

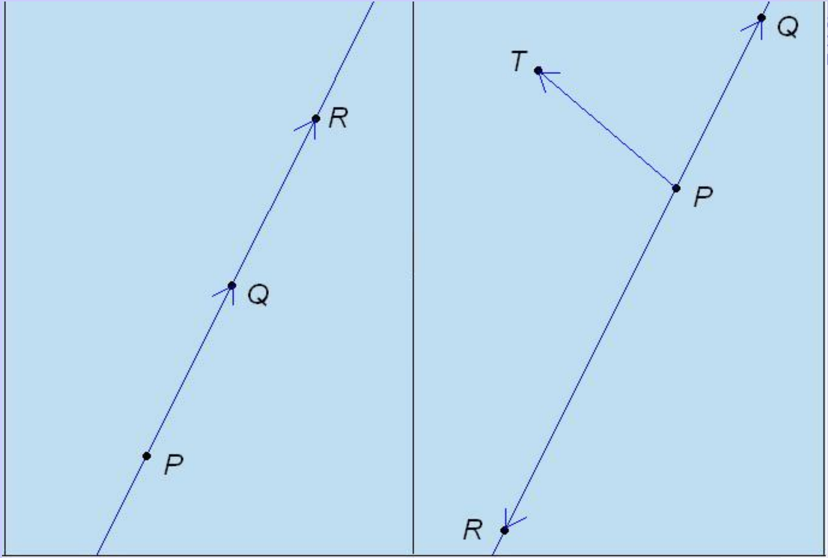


Figura: Colinealidad.

Toda recta, en el plano o en el espacio geométricos, está determinada de manera única por dos puntos distintos, digamos P y Q. Para cualquier otro punto R de la recta determinada por tales puntos debe satisfacerse, por lo dicho antes que debe existir un escalar $t \in \mathbb{R}$, tal que

$$\overrightarrow{PR} = t\overrightarrow{PQ}.$$

Se tiene entonces que

$$R = P + t\overrightarrow{PQ}. \tag{8}$$

Así, dados los puntos P, Q, distintos, entonces todo punto R de la recta determinada por tales puntos dados debe satisfacer la ecuación 8. Tal ecuación es una **ecuación vectorial** para la recta que pasa por los puntos P y Q. Los puntos dados, P y Q, también satisfacen dicha ecuación (para $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente). El vector $\overrightarrow{PQ}$ es denominado un **vector paralelo** a la recta.

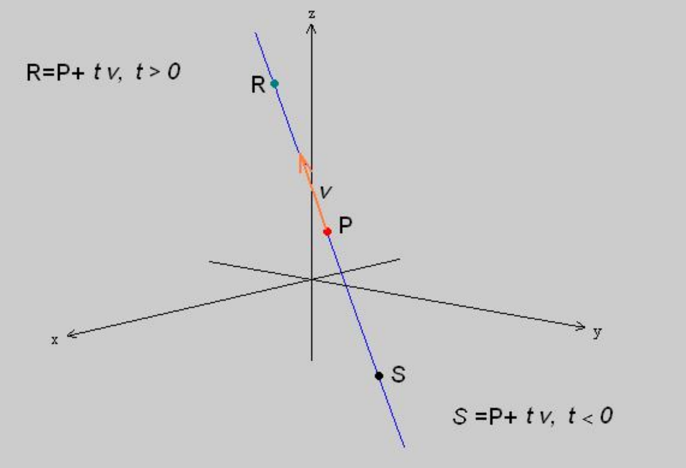


Figura: Ecuación vectorial de una recta.

Específicamente, un vector no nulo v se dice paralelo a una recta si, y sólo si, todo representante de v anclado en un punto de la recta tiene su punto final sobre dicha recta.
Así, si L es una recta que pasa por el punto P y tiene como un vector paralelo al vector no nulo v, entonces la recta es el conjunto de puntos R en el espacio euclidiano que satisfacen la ecuación (ver figura 7)

$$R = P + tv, t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

En el caso particular de $\mathcal{E}_2$, el plano euclidiano, el vector v en 9 reemplaza a la **pendiente** de la recta. De hecho, la información dada por la pendiente puede darse, utilizando un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$, tal que, si la recta no es paralela al eje X, el cociente entre la segunda componente y la primera es justamente la pendiente. Si la recta es paralela al eje indicado, entonces todo vector $\alpha(0,1)$, con $\alpha \neq 0$ será paralelo a la misma

Podemos extender lo anterior para definir rectas en el espacio $\mathbb{R}^n$. Así, si v es un vector no nulo en $\mathbb{R}$ y P es un elemento cualquiera del mismo espacio, entoces la recta que pasa por P y es paralela a v es el conjunto de "puntos" $X \in \mathbb{R}^n$ definido por

$$\{X \in \mathbb{R}^n | X = P + tv, t \in \mathbb{R}\} \tag{10}$$

Si $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, de 10 obtenemos:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = &= (p_1, p_2, \ldots, p_n) + t(v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ &= (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, \ldots, p_n + tv_n).\end{aligned}$$

de donde se obtienen las n ecuaciones, denominadas **ecuaciones paramétricas** de la recta:

$$\begin{cases} x_1 &= p_1 + tv_1 \\ x_2 &= p_2 + tv_2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_n &= p_n + tv_n \end{cases} \tag{11}$$

División de un segmento en partes iguales.

Dados puntos distintos P y Q, en el plano o en el espacio y $n \in \mathbb{N}$, se desean obtener las coordenadas de los $n-1$ puntos que dividen al segmento $\overline{PQ}$ en n segmentos de igual longitud. Designemos tales puntos por $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$, entonces para cada $i = 1, 2, \ldots n-1$ se satisface que:

$$\overrightarrow{PP_i} = \frac{i}{n}\overrightarrow{PQ}.$$

Se tiene entonces que

$$P_i = P + \frac{i}{n}\overrightarrow{PQ} \tag{12}$$

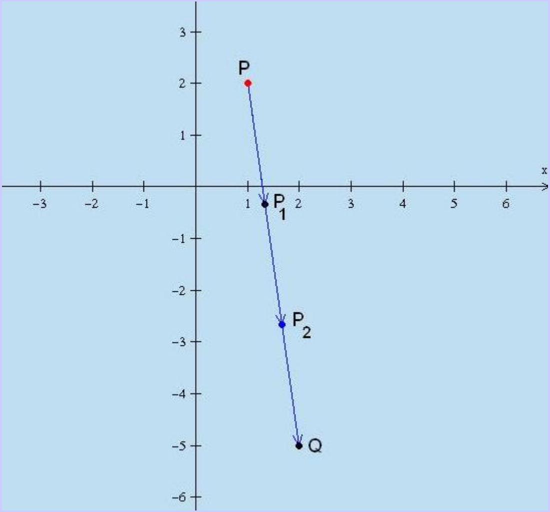


Figura: División de un segmento en tres partes iguales.

Así, por ejemplo, si $P(1,2), Q(2,-5)$, entonces si P_1 y P_2 dividen al segmento $\overline{PQ}$ en tres partes iguales (figura 8) se tienen

$$\begin{aligned} P_1 &= P + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} \\ &= \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}\right) \\ P_2 &= P + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ} \\ &= \left(\frac{5}{3}, \frac{-8}{3}\right) \end{aligned}$$

Ecuaciones vectoriales de planos.

En la Geometría euclidiana, un plano está determinado, básicamente, por tres puntos no colineales. Es decir, dados tres puntos no colineales existe uno y sólo un plano que los contiene. Vectorialmente hablando, tres puntos no colineales P, Q y R, determinan dos vectores no nulos y no paralelos

$$v = \overrightarrow{PQ}, w = \overrightarrow{PR}.$$

El plano está también determinado por las rectas (no paralelas en el sentido "geométrico") que pasan por P y tienen a v y w, respectivamente, como vectores paralelos. Dado un punto S en dicho plano, entonces el vector $\overrightarrow{PS}$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores v y w (véase figura 9).

$$\overrightarrow{PS} = tv + sw, t, s \in \mathbb{R},$$

de donde

$$S = P + tv + sw, t, s \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

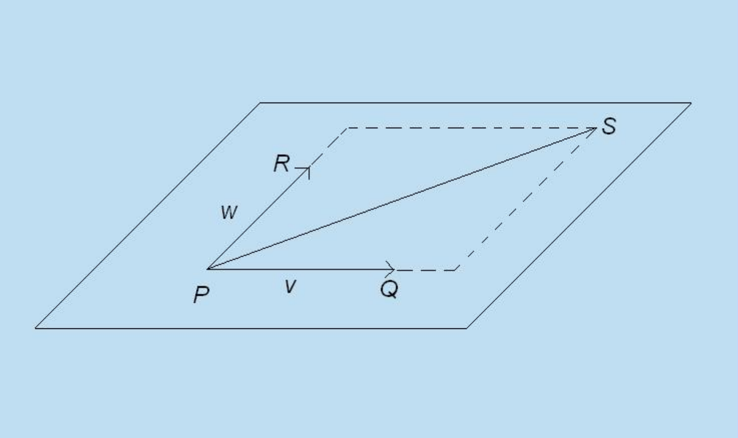


Figura: Plano.

La ecuación 13 se denomina la ecuación vectorial del plano que pasa por P y tiene como vectores **generadores** a v y w. La denominación de generadores obedece a que v y w generan al subespacio que contiene a todos los vectores $\overrightarrow{PS}$ para S en el plano. De hecho, el plano no es más que la traslación del subespacio

$$H = \langle v, w \rangle = \{tv + sw | t, s \in \mathbb{R}\},$$

el cual, geométricamente hablando, es un plano que pasa por el origen y que es "paralelo" al plano considerado. De modo que si Π es el plano que pasa por P y tiene a v y w como generadores, entonces podemos escribir

$$\Pi = P + H = \{P + u | u \in H\}.$$

Ecuaciones cartesianas de planos.

Una **normal** a un plano Π es un vector no nulo que es perpendicular a cada vector paralelo al plano. Si $n = (a, b, c)$ es una normal al plano Π y $P(x_0, y_0, z_0)$ es un punto fijo del plano, entonces para todo punto $S \in \Pi$, debe cumplirse que

$$n \bullet \overrightarrow{PS} = 0,$$

de donde se obtiene que

$$n \bullet S = n \bullet P \tag{14}$$

Si $S(x, y, z)$:

$$ax + by + cz \quad = \quad ax_0 + by_0 + cz_0$$

El invariante es entonces la constante real $d = ax_0 + by_0 + cz_0$, por lo que el plano tiene como ecuación a:

$$ax + by + cz = d \tag{15}$$

Ejemplo

Consideremos, por ejemplo, los puntos $P(1,1,3), Q(6,-1,2)$ y $R(-2,4,0)$. Tenemos entonces que

$$v = \overrightarrow{PQ} = (5,-2,-1), \overrightarrow{PR} = (-3,3,-3) = 3.(-1,1,-1)$$

Claramente v y $\overrightarrow{PR}$ no son paralelos por lo que los puntos dados no son colineales. Existe entonces un plano único que contiene a los puntos dados. Si $w = (-1,1,-1)$, el par $\{v, w\}$ es un par de generadores del plano y una normal al plano es cualquier múltiplo escalar no nulo de

$$\begin{aligned} v \times w &= \left(\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (3,6,3) \\ &= 3(1,2,1) \end{aligned}$$

Ecuaciones vectoriales del plano son, por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
(x, y, z) &= (1,1,3) + t(5,-2,-1) + s(-1,1,-1), \quad t, s \in \mathbb{R}. \\
(x, y, z) &= (6,-1,2) + t(5,-2,-1) + s(-1,1,-1), \quad t, s \in \mathbb{R}. \\
(x, y, z) &= (-2,4,0) + t(5,-2,-1) + s(-1,1,-1), \quad t, s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Tomando $n = (1,2,1)$ tenemos que una ecuación cartesiana para el plano es:

$$
\begin{aligned}
(1,2,1) \bullet (x, y, z) &= (1,2,1) \bullet (1,1,3) \\
x + 2y + z &= 6
\end{aligned}
$$

Debe notarse que si se toma cualquier otra normal, múltiplo escalar de n, la ecuación cartesiana resultante es simplemente un múltiplo de la ecuación anterior.

Proyecciones ortogonales, distancia de un punto a una recta o a un plano.

Para $n = 2, 3$, si consideramos un subespacio, W, de dimensión 1, tenemos una recta paralela a un vector no nulo w. Es decir,

$$W = \langle w \rangle = \{tw | t \in \mathbb{R}\}.$$

La proyección de un vector v sobre W viene dada entonces por

$$Proy_W(v) = \frac{v \bullet w}{w \bullet w} w \tag{16}$$

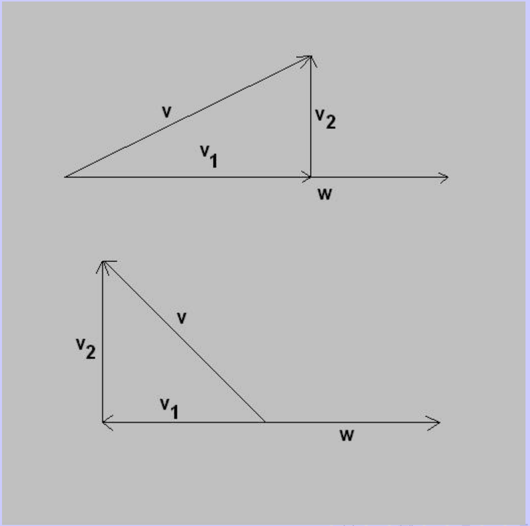
denominamos a $Proy_W(v)$, la **proyección ortogonal** de v sobre w y escribiremos generalmente $Proy_w(v)$.

Sabemos que $v - Proy_w(v) \in W^{\perp}$; es decir, $v \perp w$. Si escribimos $v_1 = Proy_w(v)$ y $v_2 = v - Proy_w(v)$, entonces claramente se tienen:

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 \\ & v_1 \perp v_2 \\ & v_1 \parallel w \end{aligned}$$

Así, tenemos que los vectores v_1 y v_2 constituyen una *descomposición* de v en vectores perpendiculares tales que uno de ellos es paralelo al vector w. Decimos que v_1 y v_2 son un par de **componentes rectangulares** de v.

La figura ilustra lo anterior. Nótese que la componente v_1, paralela al vector w, tiene su misma dirección si $v \bullet w > 0$ y dirección opuesta si $v \bullet w < 0$.



Si W es un subespacio de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$ tenemos entonces un plano. Si $\{w_1, w_2\}$ es una base ortogonal de W (es decir, w_1 y w_2 son generadores del plano) entonces para un vector $v \in \mathbb{R}^3$, la proyección ortogonal sobre W está dada por:

$$Proy_W(v) = \left(\frac{v \bullet w_1}{w_1 \bullet w_1}\right) w_1 + \left(\frac{v \bullet w_2}{w_2 \bullet w_2}\right) w_2 \qquad (17)$$

y nuevamente $v_2 = v - Proy_W(v)$ es un vector ortogonal a W; es decir, es normal al plano (Ver figura).

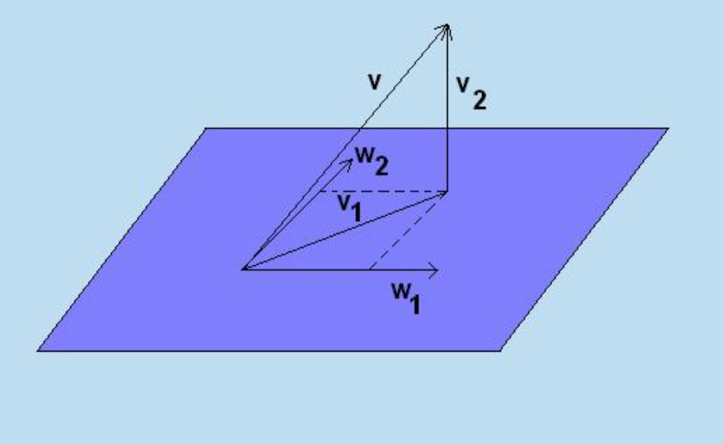


Figura: Componentes rectangulares .

Una aplicación de las proyecciones ortogonales es la de hallar la distancia de un punto a una recta o un plano dados. Si L es una recta (en $\mathcal{E}_2$ o $\mathcal{E}_3$) y P es un punto dado, entonces la distancia (perpendicular) de P a L es claramente

$$\|\overrightarrow{QP} - Proy_v(\overrightarrow{PQ})\|,$$

siendo Q un punto arbitrario de L y v un vector paralelo a L. De igual manera, para un plano $\Pi \subseteq \mathcal{E}_3$, la distancia de un punto P a dicho plano es

$$\|\overrightarrow{QP} - Proy_W(\overrightarrow{PQ})\| = \|Proy_n(\overrightarrow{QP})\|,$$

donde Q es un punto cualquiera del plano, $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, con w_1, w_2 generadores ortogonales del plano, y n una normal cualquiera.