UNIVERSIDAD DEL NORTE
División de Ciencias Básicas. Departamento de Matemáticas.
Primer parcial de Algebra Lineal. 1031-54 Septiembre 6 de 2017
M. Sc. Sebastián Castañeda H
A

I. En cada caso escoja la (única) opción correcta. N.A significa “ninguna de las anteriores”.

1. (a, a, a), con $a \in \mathbb{R}$, es una solución de la ecuación:
(a) $ax + ay + az = 3a$. •(b) $x + 2y - 3z = 0$. (c) $ax + ay = a^2$. (d) N.A.
(**Justificación:** $a+2a-3a = 0$, por lo que (a, a, a) satisface la ecuación $x+2y-3z = 0$.)

2. Si toda columna en una forma escalonada de la matriz ampliada de un sistema lineal tiene un uno principal, entonces el sistema
(a) tiene infinitas soluciones. (b) tiene única solución. •(c) es inconsistente. (d) N.A.
(**Justificación:** Como la última columna tiene un uno principal, el último renglón no nulo es $(00 \dots 0|1)$.)

3. El conjunto solución de $x + 2y = 3$, en $\mathbb{R}^3$, es:
(a) $\{(t, 3 - 2t, 0)|t \in \mathbb{R}\}$. (b) $\{(t, 3 - 2t, s)|t, s \in \mathbb{R}\}$. (c) $\{(3 - 2t, t, 0)|t \in \mathbb{R}\}$. •(d) N.A.
(**Justificación:** No pueden ser ni (a) ni (c) ya que la tercera variable puede tomar cualquier valor, no necesariamente cero. En (b), por su parte, si $x = t$, entonces $y = \frac{3-t}{2}$ lo cual es distinto de $3 - 2t$, a menos que $t = 1$.)

4. El sistema con matriz ampliada $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & 2 & a \end{array}\right)$ tiene solución única si y solo si
(a) $a \neq 0$. (b) $a = -4$. •(c) $a \in \mathbb{R}$. (d) N.A.
(**Justificación:** El determinante del sistema es $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, por lo que el sistema tiene solución única independientemente del valor de a.)

5. Una ecuación equivalente a $x - y = 3$ es
(a) $x^2 - xy = 3x$, con $x \neq 0$. (b) $bx - by = 3b, b \in \mathbb{R}$. •(c) $(x - y - 3)^2 = 0$. (d) N. A.
(**Justificación:** Claramente $x - y = 3$ y $x - y - 3 = 0$ son equivalentes. Por otra parte, si (u, v) es solución de $(x - y - 3)^2 = 0$, entonces $(u - v - 3)^2 = 0$ y sacando raíz cuadrada se tiene $u - v - 3 = 0$. Recíprocamente, si $u - v - 3 = 0$, entonces $(u - v - 3)^2 = 0$, por lo que $x - y - 3 = 0$ y $(x - y - 3)^2 = 0$ son equivalentes.)

II. Resuelva el sistema (en $\mathbb{R}^4$):

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 & = & 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 & = & 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 9 \end{cases}$$

Solución. La matriz ampliada es $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 3 & 7 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 9 \end{array}\right)$. Tenemos, usando eliminación gaussiana:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 3 & 7 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 7 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} -3F_1 + F_2 \\ -2F_1 + F_3 \\ \longrightarrow \\ -2F_1 + F_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Puesto que la segunda y la cuarta ecuación son iguales, consideramos solo las tres primeras filas. De la tercera fila concluimos que $x_4 = t, t \in \mathbb{R}$ y $x_3 = 2 - 4t$. Haciendo sustitución regresiva obtenemos

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + 2t \\ x_1 &= 4 - x_2 - x_3 - 3t \\ &= 4 - (1 + 2t) - (2 - 4t) - 3t \\ &= 4 - 1 - 2t - 2 + 4t - 3t \\ &= 1 - t \end{aligned}$$

Tenemos que el conjunto solución es $S = \{(1 - t, 1 + 2t, 2 - 4t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

III. La ecuación de una recta en el plano es de la forma $ax + by - c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0 \vee b \neq 0$. Encuentre una ecuación para la recta, si existe, que contenga los puntos $P(1, 3)$, $Q(0, 1)$ y $R(-1, -1)$.

Solución. Las coordenadas de los puntos $P, Q,$ y R deben satisfacer la ecuación $ax+by-c = 0$. Reemplazando x y y en la ecuación por las coordenadas de los puntos dados, obtenemos el sistema en las incógnitas a, b y c

$$\begin{array}{rrcl} P(1,3): & a + 3b - c &=& 0 \\ Q(0,1): & -b - c &=& 0 \\ R(-1,-1): & -a - b - c &=& 0 \end{array}$$

Resolviendo el sistema tenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1F_1 + F_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -3F_2 + F_1 \\ \longrightarrow \\ -2F_2 + F_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De donde obtenemos $c \in \mathbb{R}$, $b = c$ y $a = -2c$, con $c \neq 0$. Así, la ecuación de la recta buscada es $-2cx + cy - c = 0$, con $c \neq 0$. Es decir, existen infinitas ecuaciones, todas equivalentes, para la recta. En particular si multiplicamos por c^{-1}, tenemos la ecuación $-2x + y - 1 = 0$.

Valoración: I: 2.0, II y III: 1.5 cada uno.
Tiempo máximo: 50 minutos.

UNIVERSIDAD DEL NORTE
División de Ciencias Básicas. Departamento de Matemáticas.
Primer parcial de Algebra Lineal. 1031-54 Septiembre 6 de 2017
M. Sc. Sebastián Castañeda H
B

I. En cada caso escoja la (única) opción correcta. N.A significa "ninguna de las anteriores".

1. (a, a, a), con $a \in \mathbb{R}$, es una solución de la ecuación:
   (a) $ax + ay + az = 3a$. (b) $ax + ay = a^2$. •(c) $x + 2y - 3z = 0$. (d) N.A.
   (**Justificación:** $a+2a-3a = 0$, por lo que (a, a, a) satisface la ecuación $x+2y-3z = 0$.)

2. Si toda columna en una forma escalonada de la matriz ampliada de un sistema lineal tiene un uno principal, entonces el sistema
   (a) tiene infinitas soluciones. •(b)es inconsistente. (c) tiene única solución. (d) N.A.
   (**Justificación:** Como la última columna tiene un uno principal, el último renglón no nulo es $(00\ldots0|1)$.)

3. El conjunto solución de $x + 2y = 3$, en $\mathbb{R}^3$, es:
   (a) $\{(t, 3-2t, 0)|t \in \mathbb{R}\}$. (b) $\{(t, 3-2t, s)|t, s \in \mathbb{R}\}$. (c) $\{(3-2t, t, 0)|t \in \mathbb{R}\}$. •(d) N.A. (**Justificación:** No pueden ser ni (a) ni (c) ya que la tercera variable puede tomar cualquier valor, no necesariamente cero. En (b), por su parte, si $x = t$, entonces $y = \frac{3-t}{2}$ lo cual es distinto de $3 - 2t$, a menos que $t = 1$.)

4. El sistema con matriz ampliada $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & 2 & a \end{array}\right)$ tiene solución única si y solo si
   •(a) $a \in \mathbb{R}$. (b) $a \neq 0$. (c) $a = -4$. (d) N.A.
   (**Justificación:** El determinante del sistema es $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, por lo que el sistema tiene solución única independientemente del valor de a.)

5. Una ecuación equivalente a $x - y = 3$ es
   (a) $x^2 - xy = 3x$, con $x \neq 0$. •(b)$(x - y - 3)^2 = 0$. (c) $bx - by = 3b, b \in \mathbb{R}$. (d) N. A.
   (**Justificación:** Claramente $x - y = 3$ y $x - y - 3 = 0$ son equivalentes. Por otra parte, si (u, v) es solución de $(x-y-3)^2 = 0$, entonces $(u-v-3)^2 = 0$ y sacando raíz cuadrada se tiene $u - v - 3 = 0$. Recíprocamente, si $u - v - 3 = 0$, entonces $(u - v - 3)^2 = 0$, por lo que $x - y - 3 = 0$ y $(x - y - 3)^2 = 0$ son equivalentes.)

II. Resuelva el sistema (en $\mathbb{R}^4$):

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 10 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 13 \end{cases}$$

Solución. La matriz ampliada es $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 10 & 10 \\ 3 & 4 & 3 & 7 & 13 \end{array}\right)$. Tenemos, usando eliminación gaussiana:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 10 & 10 \\ 3 & 4 & 3 & 7 & 13 \end{array}\right) \underset{\longrightarrow}{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 9 \\ 2 & 2 & 3 & 10 & 10 \\ 3 & 4 & 3 & 7 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2F_1 + F_2 \\ -2F_1 + F_3 \\ \longrightarrow \\ -3F_1 + F_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Puesto que la segunda y la cuarta ecuación son iguales, consideramos solo las tres primeras filas. De la tercera fila concluimos que $x_4 = t, t \in \mathbb{R}$ y $x_3 = 2 - 4t$. Haciendo sustitución regresiva obtenemos

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + 2t \\ x_1 &= 4 - x_2 - x_3 - 3t \\ &= 4 - (1 + 2t) - (2 - 4t) - 3t \\ &= 4 - 1 - 2t - 2 + 4t - 3t \\ &= 1 - t \end{aligned}$$

Tenemos que el conjunto solución es $S = \{(1 - t, 1 + 2t, 2 - 4t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.
III. La ecuación de una recta en el plano es de la forma $ax + by - c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0 \vee b \neq 0$. Encuentre una ecuación para la recta, si existe, que contenga los puntos $P(1, 3)$, $Q(0, 1)$ y $R(-2, -3)$.
Solución. Las coordenadas de los puntos P, Q, y R deben satisfacer la ecuación $ax+by-c = 0$. Reemplazando x y y en la ecuación por las coordenadas de los puntos dados, obtenemos el sistema en las incógnitas a, b y c

$$\begin{array}{rrcl} P(1,3): & a + 3b - c & = & 0 \\ Q(0,1): & -b - c & = & 0 \\ R(-2,-3): & -2a - 3b - c & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo el sistema tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\longrightarrow}{2F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -3F_2 + F_1 \\ \longrightarrow \\ -3F_2 + F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De donde obtenemos $c \in \mathbb{R}$, $b = c$ y $a = -2c$, con $c \neq 0$. Así, la ecuación de la recta buscada es $-2cx + cy - c = 0$, con $c \neq 0$. Es decir, existen infinitas ecuaciones, todas equivalentes, para la recta. En particular si multiplicamos por c^{-1}, tenemos la ecuación $-2x + y - 1 = 0$.

Valoración: I: 2.0, II y III: 1.5 cada uno.
Tiempo máximo: 50 minutos.