UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Parcial I de Álgebra Lineal
Septiembre 4 de 2018
Fila A

Nombre del estudiante: ______________________________

1. **[10 pts]** Para cada una de las siguientes proposiciones, diga si la expresión es verdadera (V) o falsa (F). Justifique su respuesta.

   a) [3 pts] Las ecuaciones $4x + 2y = 3$ y $(4x + 2y - 3)^2 = 0$ son equivalentes en $\mathbb{R}^2$.

   b) [3 pts] Si $u = (-1, 1, 6)$, $v = (1, -2, 4)$ y $w = (2, -3, 5)$, entonces $(u+2v)\bullet 3w = 243$.

   c) [2 pts] El conjunto solución de la ecuación $-4x + y + 2z = 5$ en $\mathbb{R}^4$ está dado por $S = \{(r, 5 + 4r - 2s, s, t) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}$.

   d) [2 pts] Dado un sistema lineal $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, si $m < n$ entonces el sistema tiene una única solución.

2. **[15 pts]** Considere el sistema con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

   Explique por qué la matriz está en forma escalonada. Empleando sustitución regresiva encuentre el conjunto solución de dicho sistema.

3. **[15 pts]** La ecuación de una parábola con eje de simetría paralelo al eje Y es de la forma $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. Plantee y resuelva un sistema lineal, usando el método de eliminación Gauss-Jordan, para demostrar que existe una única parábola que pasa por los puntos $P(1, 5)$, $Q(-1, 3)$ y $R(2, 9)$.

4. **[10 pts]** Considere el sistema

$$\begin{cases} 9x + \lambda y &= 30 \\ \lambda x + y &= \lambda^2 + 1 \end{cases}.$$

   Determine el valor(es) de λ para que el sistema:

   a) [6 pts] Tenga solución única.

   b) [2 pts] Tenga infinitas soluciones.

   c) [2 pts] Sea inconsistente.

Tiempo máximo: 90 minutos.

Solución fila A

1

a) Sea $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ solución de $4x+2y=3$, entonces

$$4u+2v=3$$
$$4u+2v-3=0 \quad (V)$$
$$(4u+2v-3)^2=0$$

y así (u,v) es solución de la ecuación $(4x+2y-3)^2=0$.
Recíprocamente, si $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ es solución de $(4x+2y-3)^2=0$, entonces

$$(4u+2v-3)^2=0$$
$$4u+2v-3=0$$

y por tanto (u,v) es solución de $4x+2y=3$.

b) $(u+2v)\cdot 3w=(1,-3,14)\cdot(6,-9,15)$
$$=6+27+210 \quad (V)$$
$$=243$$

c) $y=5+4x-2z+0\cdot w$.
Si $x=r$, $z=s$ y $w=t$. El conjunto solución es (V)
$$S=\{(r,5+4r-2s,s,t)\mid r,s,t\in\mathbb{R}\}$$

d) Si $m<n$ el sistema es inconsistente o tiene más de una solución. (F)

2

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Tenemos
$$\begin{array}{r} x+w=-3 \\ y+z+2w=4 \\ w=-1 \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l} x=-2 \\ y=6-z \\ w=-1. \end{array}$$

$\Rightarrow S=\{(-2,6-t,t,-1)\mid t\in\mathbb{R}\}$.
La matriz está en forma escalonada.

3 Dado que P, Q y R son puntos de la parábola, entonces

$$a+b+c=5$$
$$a-b+c=3$$
$$4a+2b+c=9$$

matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[-4F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{-F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

la única parábola que pasa por P, Q y R tiene por ecuación
$$y=x^2+x+3.$$

4 El determinante del sistema es.

$$D=\begin{vmatrix} 9 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}=9-\lambda^2=(3-\lambda)(3+\lambda).$$

$D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 3 \wedge \lambda\neq -3$. El sistema tiene una única solución para todo $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$.

Para $\lambda=-3$ ó $\lambda=3$, tenemos que
$$D=0.$$

Si $\lambda=-3$, tenemos el sistema
$$\begin{cases} 9x-3y=30 \\ -3x+y=10 \end{cases}. \text{ Dado que } \begin{vmatrix} 9 & 30 \\ -3 & 10 \end{vmatrix}=90+90\neq 0, \text{ entonces}$$
el sistema es inconsistente.

Si $\lambda=3$, tenemos el sistema
$$\begin{cases} 9x+3y=30 \\ 3x+y=10 \end{cases}. \text{ Dado que } \begin{vmatrix} 9 & 30 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}=90-90=0, \text{ entonces}$$
el sistema tiene infinitas soluciones.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Parcial I de Álgebra Lineal
Septiembre 4 de 2018
Fila B

Nombre del estudiante: ______________________________

1. **[10 pts]** Para cada una de las siguientes proposiciones, diga si la expresión es verdadera (V) o falsa (F). Justifique su respuesta.

   a) [3 pts] Las ecuaciones $6x+4y=5$ y $(6x+4y-5)^2=0$ son equivalentes en $\mathbb{R}^2$.

   b) [3 pts] Si $u=(1,-2,4)$, $v=(2,-3,5)$ y $w=(-1,1,6)$, entonces $(u+2v)\bullet 3w=213$.

   c) [2 pts] El conjunto solución de la ecuación $2x-3y+z=6$ en $\mathbb{R}^4$ está dado por $S=\{(r,s,6-2r+3s,t)\mid r,s,t\in\mathbb{R}\}$.

   d) [2 pts] Dado un sistema lineal $m\times n$ sobre $\mathbb{R}$, si $m<n$ entonces el sistema tiene una única solución.

2. **[15 pts]** Considere el sistema con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

   Explique por qué la matriz está en forma escalonada. Empleando sustitución regresiva encuentre el conjunto solución de dicho sistema.

3. **[15 pts]** La ecuación de una parábola con eje de simetría paralelo al eje Y es de la forma $y=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$. Plantee y resuelva un sistema lineal, usando el método de eliminación Gauss-Jordan, para demostrar que existe una única parábola que pasa por los puntos $P(1,0)$, $Q(-1,-4)$ y $R(2,5)$.

4. **[10 pts]** Considere el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + y & = \lambda^2+1 \\ 16x+\lambda y & = 68 \end{cases}.$$

   Determine el valor(es) de λ para que el sistema:

   a) [6 pts] Tenga solución única.

   b) [2 pts] Tenga infinitas soluciones.

   c) [2 pts] Sea inconsistente.

Tiempo máximo: 90 minutos.

Solución fila B

①

a) Sea $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ solución de $6x+4y=5$, entonces

$$6u+4v=5$$
$$6u+4v-5=0$$ V
$$(6u+4v-5)^2=0$$

y así (u,v) es solución de la ecuación $(6x+4y-5)^2=0$.

Recíprocamente, si $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ es solución de $(6x+4y-5)^2=0$, entonces

$$(6u+4v-5)^2=0.$$
$$6u+4v-5=0.$$

y por tanto (u,v) es solución de $6x+4y=5$.

b) $(u+2v)\cdot 3w=(5,-8,14)\cdot(-3,3,18)$
$$=-15-24+252$$
$$=213.$$ V

c) $z=6-2x+3y+0\cdot w$

si $x=r,\ y=s,\ w=t$ el conjunto solución es V

$S=\{(r,s,6-2r+3s,t)\mid r,s,t\in\mathbb{R}\}$

d) Si $m<n$ el sistema es inconsistente o tiene más de una solución. F

②

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Tenemos

$$\left.\begin{array}{r} x+2w=0 \\ y+2z+w=6 \\ w=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=4 \\ y=8-2z \\ w=-2 \end{array}$$

$\rightarrow S=\{(4,8-2t,t,-2)\mid t\in\mathbb{R}\}$.

la matriz está en forma escalonada.

③ Dado que P, Q y R son puntos de la parábola, entonces

$$a+b+c=0$$
$$a-b+c=-4$$
$$4a+2b+c=5$$

matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[-4F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$$ la única parábola que pasa por P, Q y R tiene por ecuación

$$y=x^2+2x-3.$$

④ El determinante del sistema es

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 16 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-16=(\lambda-4)(\lambda+4)$$

$D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 4 \wedge \lambda\neq -4$. El sistema tiene una única solución para todo $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-4,4\}$.

Para $\lambda=-4$ ó $\lambda=4$, tenemos que

$$D=0.$$

Si $\lambda=-4$, tenemos el sistema

$\left\{\begin{array}{l} -4x+y=17 \\ 16x-4y=68 \end{array}\right.$. Dado que $\begin{vmatrix} -4 & 17 \\ 16 & 68 \end{vmatrix}=-272-272\neq 0$, entonces el sistema es inconsistente.

Si $\lambda=4$, tenemos que el sistema

$\left\{\begin{array}{l} 4x+y=17 \\ 16x+4y=68 \end{array}\right.$. Dado que $\begin{vmatrix} 4 & 17 \\ 16 & 68 \end{vmatrix}=272-272=0$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.