UNIVERSIDAD DEL NORTE
Departamento de Matemáticas y Estadística
Álgebra lineal.
Ejercicios resueltos, parcial 2

1. Sean A y B matrices 2×2 sobre el campo real. Si

$$(2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

determine:

(a) $(3AB^{-1})^{-1}$.
(b) $(3A^T)^{-1}$
(c) Una matriz X tal que $2AX = B$.

Se tiene que

$$(2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{1}{2}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, B = (B^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces

$$(3AB^{-1})^{-1} = \frac{1}{3}(B^{-1})^{-1}A^{-1} = \frac{1}{3}BA^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{44}{3} \\ \frac{14}{3} & \frac{44}{3} \end{pmatrix}.$$

$$(3A^T)^{-1} = \frac{1}{3}(A^{-1})^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

$$2AX = B \Longrightarrow X = (2A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 13 & 21 \end{pmatrix}.$$

2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule, si están definidas:

(a) AB, BA, $(AB)C$, $B(AD)$.

(b) $(CA)_1$, $(CA)^{(2)}$.

(c) $(AB+2C)_2$

Solución:

(a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 22 & 7 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 10 & -12 & -1 \\ 4 & -15 & -14 \\ 8 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, $(AB)C = \begin{pmatrix} -7 & 42 \\ 15 & 108 \end{pmatrix}$,

$B(AD) = \begin{pmatrix} 34 & -76 & 85 \\ 34 & -146 & 51 \\ 8 & 48 & 52 \end{pmatrix}$.

(b) $(CA)_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$, $(CA)^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \end{pmatrix}$.

(c) $(AB+2C)_2 = \begin{pmatrix} 20 & 19 \end{pmatrix}$.

3. Muestre que $\mathbb{R}^{n\times n}$, para $n \geq 2$ no es un **dominio entero**. Es decir, existen matrices $n \times n$, no nulas, A y B sobre el campo $\mathbb{R}$, tales que $AB = 0_{n\times n}$. Siendo $0_{n\times n}$ la matriz nula $n \times n$.

Solución: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A, B \neq 0_{2\times 2}$ pero $AB = 0_{2\times 2}$.

4. En cada caso determine, si existe, la inversa de la matriz dada:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, en $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, en $\mathbb{R}^{4\times 4}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, en $\mathbb{Z}_5^{3\times 3}$.

Soluciones:

5. (a) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} Adj(A) = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

por lo que A no es invertible. Si se usa el hecho de que una matriz es invertible si y solo si su determinante es diferente de cero, entonce se tiene que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

se sigue que A no es invertible.

(c) Resuelva, usando Gauss-Jordan,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

obteniendo

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

por lo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(d) Se tiene que $\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-2(3)) = 1-1 = 0$ (pues en $\mathbb{Z}_5$, $2(3) = 1$). Luego A no es invertible.

6. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Resuelva las ecuaciones:

(a) $AX = B$.

(b) $XC = I_2$.

(c) $AX = B^T$.

(d) $XA = B^T$

Soluciones:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{-2F_2+F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -1 \end{array}\right)$$

De modo que no hay solución.

(b) Aplicando transposición a $XC = I_2$, tenemos $C^T X^T = I_2^T = I_2$ la cual tiene sentido y la resolvemos para X^T:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-2F_1+F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{-1F_2}{\overset{1F_2+F_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

La matrix hallada es $X^T = \begin{pmatrix} -1-t & 1-s \\ 2-t & -1-s \\ t & s \end{pmatrix}$, con t y s reales arbitrarios.

Por lo tanto

$$X = (X^T)^T = \begin{pmatrix} -1-t & 2-t & t \\ 1-s & -1-s & s \end{pmatrix}.$$

(c) A tiene 3 filas y B^T tiene apenas 2 filas por lo que el problema no tiene sentido pues, en caso de existir X el producto AX debería tener 3 filas, como A, y B^T, el resultado esperado, solo tiene 2 filas.

(d) Aplicando transposición, se tiene $A^T X^T = B$. Proceda como en (b), resolviendo

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

que claramente es inconsistente.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ y suponga que $\det(A) = 3$. Calcular, justificando sus cálculos:

(a) $\det(2A)$.
Solución

$$\begin{aligned}\det(2A) &= \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} \\ &\overset{\substack{\frac{1}{2}F_1 \\ \frac{1}{2}F_2}}{\underset{\frac{1}{2}F_3}{=}} 2(2)(2)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ &= 2^3(3) = 24\end{aligned}$$

(b) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$.
Solución

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} &\overset{\substack{\frac{1}{2}F_1 \\ -1F_2}}{\underset{\frac{1}{5}F_3}{=}} 2(-1)(5)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ &= -10(3) = -30\end{aligned}$$

(c) $\begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \\ a & b & c \end{vmatrix}$.
Solución. Realice las operaciones $\frac{1}{2}F_1, -1F_2, F_1 \leftrightarrow F_3, F_2 \leftrightarrow F_3$ obteniendo que el determinante pedido es

$$2(-1)(-1)(-1)(3) = -6.$$

(d) $\begin{vmatrix} 2g & -3a & d \\ 2h & -3b & e \\ 2i & -3c & f \end{vmatrix}$.
Solución. Haga $\frac{1}{2}C_1, -\frac{1}{3}C_2, C_1 \leftrightarrow C_2, C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que el determinante pedido es

$$2(-3)(3) = -18.$$

(e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & -d & -e & -f \\ 0 & 0 & 5g & 5h & 5i \\ 1 & 2 & a & b & c \\ 3 & 4 & d & e & f \end{vmatrix}$.
Solución. Intercambie fila 1 con fila cuatro y fila dos con fila cinco, por lo que

el determinante pedido es

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a & b & c \\ 3 & 4 & d & e & f \\ 0 & 0 & 5g & 5h & 5i \\ 0 & 0 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & -d & -e & -f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5g & 5h & 5i \\ 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \end{vmatrix}.$$

(f) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c & d & e & f \\ -d & -e & -f & g & h & i \\ 5g & 5h & 5i & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & e+2 & f+3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & a & e & f \end{vmatrix}.$

Solución. Haciendo $-1F_6 + F_4$ se obtiene que las filas cuatro y cinco de la matriz resultante son múltiplos escalares por lo que el determinante es cero.

8. En cada caso escoja la(s) opciones correctas (pueden ser más de una):

(a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, entonces

i. A es invertible.

ii. El sistema $AX = b$ tiene solución única, si $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

iii. Si $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, el sistema $AX = b$ tiene infinitas soluciones.

iv. • Si $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, el sistema $AX = b$ tiene infinitas soluciones o es inconsistente.

v. N.A

Justificación: Se tiene que $F_3 = F_1 + F_2$, por lo que $\det(A) = 0$, luego el sistema no puede tener solución única.

(b) Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\det(A) \neq 0$, entonces

i. A es invertible.•

ii. $AX = b$ tiene solución única, si $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. •

iii. No existen dos columnas de A que sean iguales. •

iv. La ecuación $AX = O_{n\times 1}$ tiene como única solución la trivial. •

v. N.A

Justificación: Como $\det(A) \neq 0$, A es invertible, luego todo sistema $AX = b$ tiene solución única; en particular el sistema homogéneo cuya matriz es A tiene solamente la solución trivial. Si dos columnas fuesen iguales se tendría que $\det(A) = 0$.

(c) Si $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $2A + 3BA - CA = I_n$, entonces:

i. A es invertible.•

ii. B es invertible.

iii. $D = C - 3B - 2I_n$ es invertible y $D^{-1} = -A$.•

iv. C no es invertible.

v. N.A

Justificación: Se tiene, usando propiedades del producto matricial, que

$$(2I_n + 3B - C)A = (-D)A = I_n,$$

por lo que A es invertible con inversa $-D$. Como $(-D)A = D(-A) = I_n$ se sigue que $D^{-1} = -A$. Sobre B y C nada se puede concluir con relación a la inversibiliadad.

(d) Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\det(A) = 2$, entonces:

i. $\det(3A) = 6$.

ii. $\det(3A^T) = 6$.

iii. $\det(3A)^T = 54$. •

iv. $\det(3A^{-1}) = \dfrac{3}{2}$.

v. $\det(3A^{-1}) = \dfrac{27}{2}$. •

vi. $\det(3A)^{-1} = \dfrac{1}{54}$. •

Justificación: Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces al multiplicar α por A se multiplican n filas por α, por lo que $\det(A) = \alpha^n \det(A)$; además, $\det(A) = \det(A^T)$ y si $\alpha \neq 0$ se tiene que $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

9. En cada caso indique si la proposición dada es verdadera o falsa. Justifique formalmente sus respuestas.

(a) Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\det(A) = 0$, entonces al menos una fila es múltiplo de otra. **(F)**

Justificación: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (pues $F_3 = F_1 + F_2$), pero no existe una fila que sea múltiplo de otra,

(b) Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y una fila es múltiplo de otra, entonces $\det(A) = 0$.**(V)**
Justificación: Si existen i, j y α con $F_j = \alpha F_i$, haciendo $-\alpha F_i + F_j$, se anula la fila j y el determinante es cero.

(c) Si $\det(A) = 0$, entonces al menos una fila (o columna) de A es nula.**(F)**

Justificación: Ver literal (a). O considere $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ que no tiene ni filas ni columnas nulas.

(d) Si una fila de una matriz $n \times n$, $n \geq 2$, es una suma de múltiplos de otras filas, entonces el determinantede la matriz es cero.**(V)**

Justificación: Si se cumple que $F_i = \sum\limits_{k=1}^{t} \alpha_k F_{i_k}$; es decir, que la fila i es una suma de múltiplos de t filas distintas a F_i, entonces haciendo las operaciones $-\alpha_k F_{i_k} + F_i$, para $k = 1, \ldots, t$, se anula la fila i y el determinante es cero.