UNIVERSIDAD DEL NORTE
Departamento de Matemáticas y Estadística.
Álgebra Lineal.

RESUMEN DE TEMAS DEL EXAMEN FINAL (2020-10)

I. Sistemas homogéneos y subespacios de $\mathbb{R}^n$.

1. **Definiciones básicas**.

   (a) Para el sistema lineal $m \times n$:
   $$AX = b \tag{1}$$
   el sistema homogéneo asociado es el sistema
   $$AX = 0_{\mathbb{R}^{m\times 1}} \tag{2}$$

   (b) Sean $v_1, v_2, \ldots, v_m, v \in \mathbb{R}^n, S \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces

   - **Combinación lineal.** v es combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ si y solo si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tales que
   $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = v \tag{3}$$
   La ecuación (en los escalares α_i) (3) es equivalente al sistema lineal $n \times m$ con matriz ampliada
   $$(v_1^T v_2^T \ldots v_m^T | v^T) \tag{4}$$
   - **Dependencia lineal.** Los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ son **linealmente dependientes** (l.d) si y solo si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, no todos nulos tales que
   $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0_{\mathbb{R}^n} \tag{5}$$
   Es decir, existe una combinación lineal nula no trivial de los vectores. La ecuación (5) equivale así al sistema homogéneo $n \times m$ con matriz ampliada
   $$\left(v_1^T v_2^T \ldots v_m \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right. \right) \tag{6}$$
   - **Independencia lineal.** Los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ son **linealmente independientes** si y solo si no son l.d.
   - Un conjunto S es l.d si y solo si existen vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k \in S$ que son l.d. S es l.i si no es l.d
   - **Subespacio.** S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, notado $S \preceq R^n$, si y solo si es no vacío y cerrado para las operaciones de espacio vectorial. Así un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que también es un espacio vectorial.
   $\{(0, 0, \ldots, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ y $\mathbb{R}^n$ son subespacios (triviales) de $\mathbb{R}^n$.
   - Si $S \preceq \mathbb{R}^n$ y $v_1, v_2, \ldots, v_m \in S$, entonces $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ genera a S si y solo si todo vector de S es combinación lineal de los elementos de M.

2. **Resultados importantes.**

    - El conjunto solución de un sistema homogéneo en $\mathbb{R}^n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
    - Toda solución de un sistema lineal $m \times n$ consistente es de la forma $v_p + v_H$, donde v_p es una solución particular cualquiera y v_H es una solución del sistema homogéneo asociado.
    - En un sistema homogéneo $m \times n$, si n (número de variables) es mayor que m (número de ecuaciones), entonces el sistema tiene soluciones no triviales (infinitas en el caso de $\mathbb{R}^n$).
    - Si $v_1, v_2, \ldots, v_m \in R^n$, entonces

        (a) Si $m = 1$, v_1 es ld si y solo si v_1 es el vector nulo.

        (b) Si $m > 1$, los vectores son l.d si y solo si al menos uno de los vectores es combinación lineal de los demás. En particular, si $m = 2$, v_1 y v_2 son l.d si y solo si uno de los dos es múltiplo del otro.

        (c) Si $m = n$ los vectores son ld si y solo si $\det(v_1^T v_2^T \ldots v_m^T) = 0$..

        (d) Si $m > n$, los vectores son l.d.

        (e) El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Se denomina **subespacio generado** por lo vectores. Notación

        $$\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_m v_m | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$$

        La intersección de una familia cualquiera de subespacios (finita o infinita) de $\mathbb{R}^n$ es también un subespacio.
        En general, el subespacio generado por un conjunto es la intersección de todos los subespacios que contienen al conjunto. Si el conjunto es no vacío, el subespacio generado es el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos del conjunto. Para S, notamos el subespacio generado por S como $\langle S \rangle$. En particular $\langle \emptyset \rangle = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$

    - Todo conjunto que contenga al vector nulo es l.d
    - Todo subconjunto de un conjunto l.i es l.i y todo superconjunto de un conjunto l.d es l.d.

3. **Bases y dimensión**. Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, una **base** para S es un conjunto de generadores l.i. Se tiene

    - Dos bases para S tienen el mismo número de elementos. El número de elementos de una base para S es la **dimensión** de S, notada $\dim_{\mathbb{R}}(S)$.
    - Para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, si e_i denota al vector en el cual la componente número i es 1 y las demás son ceros, entonces

        $$B_S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

        es una base para $\mathbb{R}^n$. Esa es la base **estándar**. Así, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$.

- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para $\mathbb{R}^n$ si y solo si

$$\det(v_1^T v_2^T \dots v_n^T) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0$$

- Si $\dim_{\mathbb{R}}(S) = m$, entonces si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq S$:
  B es base de S si y solo si $\langle B \rangle = S$ si y solo si B es l.i

- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, son equivalentes:
  (a) A es invertible.
  (b) Toda ecuación $AX = B$, con $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ tiene solución única $X = A^{-1}B$. (incluye sistemas lineales).
  (c) Las filas (o columnas transpuestas) de A son l.i.
  (d) las filas (o columnas transpuestas) de A generan a $\mathbb{R}^n$.
  (e) Las filas (o columnas transpuestas) de A forman una base para $\mathbb{R}^n$.

4. **Norma vectorial, ortogonalidad**

- Si $v \in \mathbb{R}^n$,

$$||v|| = \sqrt{v \bullet v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \tag{7}$$

- **Propiedades básicas**. Si $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} \|v\| &\geq 0, \qquad \|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = (0, 0, \dots, 0) \\ \|\alpha v\| &= |\alpha| \|v\| \\ |v \bullet w| &\leq \|v\| \|w\| \quad \textbf{Desigualdad de Cauchy- Schwarz} \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\| \quad \textbf{Desigualdad triangular} \end{aligned}$$

- **Ángulo entre vectores**. Si v, w son vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, el ángulo entre los dos es el único ángulo $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$Cos(\theta) = \frac{v \bullet w}{\|v\| \|w\|} \tag{8}$$

- Dos vectores no nulos son **perpendiculares** si y solo si el ángulo entre los dos es $\dfrac{\pi}{2} rad.$ (90°).
- Dos vectores cualesquiera $v, w \in \mathbb{R}^n$ son **ortogonales** si y solo si $v \bullet w = 0$.
- Si v, w son no nulos y θ es el ángulo entre los dos, entonces θ es:
  (a) Agudo, si y solo si $v \bullet w > 0$.
  (b) Recto, si y solo so $v \bullet w = 0$.
  (c) Obtuso, si y solo si $v \bullet w < 0$.
- Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$, el **complemento ortogonal** de S es el conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ que son ortogonales a todos los elementos de S. Se nota $S^{\perp}$ y es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

- Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ es un conjunto finito, entonces $S^\perp$ es el subespacio solución del sistema homogéneo $m \times n$ con matriz ampliada
$$\left(\begin{array}{c|c} v_1 & 0 \\ v_2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ v_m & 0 \end{array}\right).$$
- En particular, $\{(0, 0, \ldots, 0)\}^\perp = \mathbb{R}^n$. Y si $v \neq 0$, entonces $\{v\}^\perp$ tiene dimensión $n - 1$. En particular, si $(a, b) \neq (0, 0)$, entonces
$$\{(a, b)\}^\perp = \langle(-b, a)\rangle = \langle(b, -a)\rangle$$
es el espacio de todos los vectores ortogonales al vector (a, b).
- Si $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3)$ son vectores l.i de $\mathbb{R}^3$, entonces el complemento ortogonal del conjunto formado por tales vectores; es decir, el espacio de todos los vectores ortogonales a ambos, es generado por el **producto cruz** de v y w
$$v \times w = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$
- Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es **vector unitario** si y solo si $\|v\| = 1$. Si $v \neq (0, 0, \ldots, 0)$, el vector
$$u_v = \left(\frac{1}{\|v\|}\right) v \tag{9}$$
es unitario y se denomina **vector unitario direccional** de v o, simplemente, **dirección** de v. Dos vectores no nulos v, w son **paralelos**, notado $v \parallel w$, si y solo si $u_w = \pm u_v$.
- Si $v, w \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, son equivalentes.
  (a) $v \parallel w$.
  (b) v y w son múltiplos escalares (no nulos) uno del otro.
  (c) El ángulo entre v y w es 0 o π ($180°$).

II. Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1. **Segmentos dirigidos**. Para $n \in \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{E}_n$ denotará al espacio geométrico $n-$dimensional. Así, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ denotan, respectivamente, la recta, el plano y el espacio tridimensional euclidianos. Existe una correspondencia biunívoca (biyección) entre el espacio geométrico $\mathcal{E}_n$ y el espacio algebraico $\mathbb{R}^n$, la cual se consigue mediante la introducción de un sistema de coordenadas $n-$ dimensional.

   (a) Un segmento dirigido en $\mathcal{E}_n$ es un par ordenado de puntos (P, Q). La **magnitud** de un segmento dirigido (P, Q) es la distancia de P a Q. Si P=Q se tiene un segmento dirigido nulo. Para un segmento dirigido (P, Q), con $P \neq Q$, la dirección está dada por los ángulos formados con las direcciones positivas de los ejes coordenados.

(b) Dos segmentos dirigidos son equivalentes si son ambos nulos o, en caso de no serlo, tiene igual magnitud y dirección. La clase de equivalencia de un segmento dirigido (P, Q) es el conjunto de todos los segmentos equivalentes a (P, Q). Se tiene el resultado:

$$(P, Q) \equiv (R, S) \Longleftrightarrow Q - P = S - R$$

donde identificamos los puntos con sus coordenadas. Así, describimos todo elemento de la clase por medio de un vector $Q - P$ en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Cada elemento de la clase es un representante de la misma El representante o representación regular es el representante con punto inicial en el origen. La magnitud y la dirección de los elementos de la clase (representantes de la clase) corresponden a la **norma** y a la dirección (vector unitario) del vector que describe la clase.

(c) Para todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ se tiene $v = \|v\| u_v$, donde u_v es el vector unitario direccional (dirección) de v y $\|v\| = \sqrt{v \bullet v}$.

(d) Si v, w son vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, el ángulo entre ellos es el único ángulo $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$cos\theta = \frac{v \bullet w}{\|v\| \|w\|} \tag{10}$$

Para $n = 2, 3$ es el menor ángulo que forman las representaciones regulares de v y w.

2. **Paralelismo y ortogonalidad.**.

(a) Si $v, w \in \mathbb{R}^n - \{O\}$, $n = 2, 3$, entonces

$$\begin{aligned} v \parallel w &\Longleftrightarrow u_w = \pm u_v && (11)\\ &\Longleftrightarrow w = \alpha v, \alpha \neq 0 && (12)\\ &\Longleftrightarrow \text{ El ángulo entre los dos es } 0 \text{ o } \pi && (13)\\ v \perp w &\Longleftrightarrow \text{ El ángulo entre los dos es } \frac{\pi}{2} && (14)\\ &\Longleftrightarrow v \bullet w = 0 && (15) \end{aligned}$$

(b) **Colinealidad**:
Tres puntos distintos $P, Q, R \in \mathcal{E}_n$ son colineales $\Longleftrightarrow \overrightarrow{PR} = \alpha \overrightarrow{PQ}$

3. **Ecuaciones vectoriales de rectas:** Dados un punto P y un vector v, paralelo a la recta (un vector no nulo tal que todo representante anclado en un punto de la recta queda contenido en la misma) una ecuación vectorial para la recta es

$$S = P + tv, t \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

donde S es un punto variable ((x, y) o (x, y, z), según el espacio geométrico).

4. Las coordenadas de los puntos que dividen a un segmento dado $\overline{PQ}$ en n partes iguales ($n \geq 2$) vienen dadas por (ver figura 1)

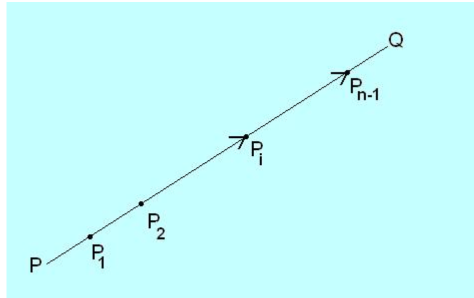

Figure 1: Coordenadas de P_i.

$$P_i = P + \frac{i}{n}\overrightarrow{PQ}, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{17}$$

5. **Ecuaciones de planos**.
Ecuación vectorial: Si P es un punto del plano y v, w son un par de generadores del plano (dos vectores no nulos y no paralelos entre sí, pero paralelos al plano) una ecuación vectorial para el plano es

$$S = P + tv + sw, t, s \in \mathbb{R} \tag{18}$$

Ecuación cartesiana: Si $n = (a, b, c)$ es una normal al plano indicado (un vector no nulo ortogonal a todo vector paralelo al plano), una ecuación para el plano es

$$n \bullet S = n \bullet P \tag{19}$$

Si $P(x_o, y_0, z_0)$ y $ax_0 + by_0 + cz_0 = n \bullet P = d$ la ecuación (19) se convierte en

$$ax + by + cz = d \tag{20}$$

Si v y w son generadores del plano, entonces toda normal al plano es de la forma $\alpha(v \times w)$, con $\alpha \neq 0$.

6. **Proyecciones ortogonales. Distancia de un punto a una recta o a un plano.** Dados vectores (no nulos) $v, w \in \mathbb{R}^n$, existen vectores únicos, v_1 y v_2 tales que

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 \\ v_1 \bullet v_2 &= 0 \\ v_1 &= \alpha w \end{aligned}$$

v_1 y v_2 son **componentes rectangulares** (ver figura 2) de v. El vector $v_1 = Proy_w v$ es la *proyección ortogonal* de v sobre w, tal vector y su norma están dados por

$$v_1 = Proy_w v = \left(\frac{v \bullet w}{\|w\|^2}\right) w \tag{21}$$

$$\|Proy_w v\| = \frac{|v \bullet w|}{\|w\|} \tag{22}$$

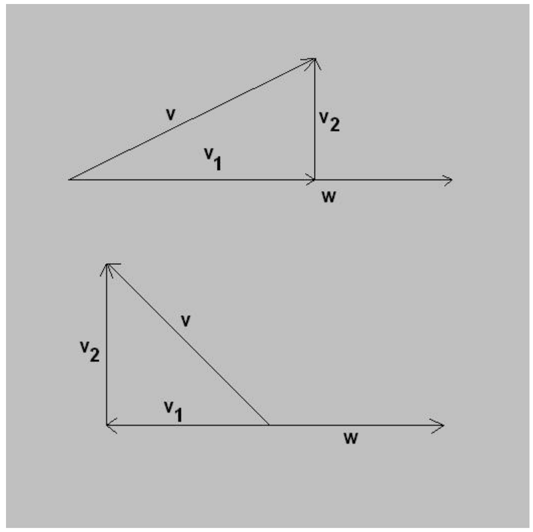

Figure 2: Componentes rectangulares.

Una aplicación de las proyecciones ortogonales es la determinación de distancias de un punto dado a una recta o un plano dados.

- **Distancia de un punto a una recta**. Dados un punto P y una recta L se requiere hallar la distancia (perpendicular) d de P a L (véase figura 3)

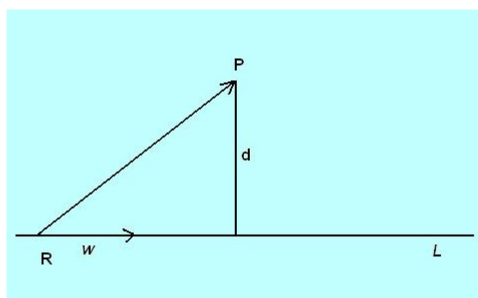

Figure 3: Distancia de un punto a una recta .

Claramente, se tiene

$$d = \sqrt{\|\overrightarrow{RP}\|^2 - \|Proy_w\overrightarrow{RP}\|^2} = \sqrt{\|\overrightarrow{RP}\|^2 - \frac{|\overrightarrow{RP} \bullet w|^2}{\|w\|^2}} \tag{23}$$

Donde R es un punto cualquiera de la recta y w un vector paralelo a la misma.

- **Distancia de un punto a un plano.** Dados un punto P y un plano Π en el espacio se requiere hallar la distancia, D, de P a Π. Si R es un punto del plano Π y n es una normal a Π, entonces se tiene (ver figura 4)

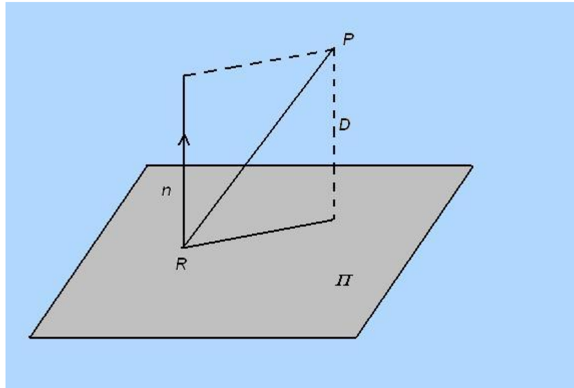

Figure 4: Distancia de un punto a un plano.

$$
\begin{aligned}
D &= \|Proy_n \overrightarrow{RP}\| \qquad (24)\\
&= \frac{|\overrightarrow{RP} \bullet n|}{\|n\|}\\
&= \frac{|n \bullet P - n \bullet R|}{\|n\|}
\end{aligned}
$$

Si $n = (a, b, c)$ y $n \bullet R = d$, de modo que una ecuación cartesiana del plano es $ax + by + cz = d$, se tiene que si $P(x_0, y_0, z_0)$, entonces de (24) se tiene

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (25)$$

7. **Áreas, perímetros, ángulos interiores de un triángulo.**
   Si P, Q y R son puntos no colineales en $\mathcal{E}_n$ entonces son los vértices de un triángulo. En la figura 5 se tiene

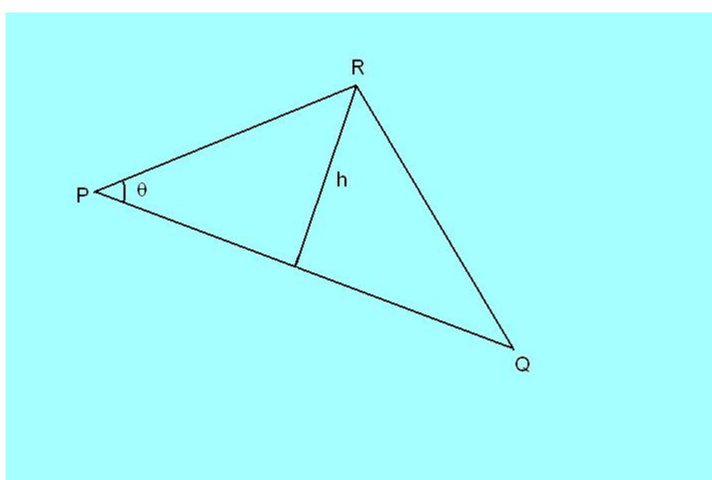

Figure 5: Triángulo en $\mathcal{E}_n$.

- θ es el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ (o entre $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{RP}$) por lo que

$$cos\ \theta = \frac{\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PR}}{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\overrightarrow{PR}\|}.$$

- El perímetro del triángulo es $\|\overrightarrow{PQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{QR}\|$.

- Para el área, a, del triángulo, tenemos varias opciones, en la primera de ellas h, la altura, es la distancia de R a la recta que pasa por P y Q:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\|\overrightarrow{PQ}\|h}{2} \\ &= \frac{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\overrightarrow{PR}\|Sen\ \theta}{2} \\ &= \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|}{2} \end{aligned}$$

  En la última opción, si los puntos están en el plano ($\mathcal{E}_2$), se puede identificar el plano con el subespacio $\{(x, y, 0)|x, y \in \mathbb{R}\} \preceq \mathbb{R}^3$