UNIVERSIDAD DEL NORTE
Departamento de Matemáticas y Estadística
Álgebra lineal.
Ejercicios resueltos, parcial 2

1. Sean A y B matrices 2×2 sobre el campo real. Si

$$(2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

determine:

(a) $(3AB^{-1})^{-1}$.

(b) $(3A^T)^{-1}$

(c) Una matriz X tal que $2AX = B$.

Se tiene que

$$(2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{1}{2}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, B = (B^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces

$$(3AB^{-1})^{-1} = \frac{1}{3}(B^{-1})^{-1}A^{-1} = \frac{1}{3}BA^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{44}{3} \\ \frac{14}{3} & \frac{44}{3} \end{pmatrix}.$$

$$(3A^T)^{-1} = \frac{1}{3}(A^{-1})^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

$$2AX = B \Longrightarrow X = (2A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 13 & 21 \end{pmatrix}.$$

2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule, si están definidas:

(a) AB, BA, $(AB)C$, $B(AD)$.

(b) $(CA)_1$, $(CA)^{(2)}$.

(c) $(AB+2C)_2$

Solución:

(a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 22 & 7 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 10 & -12 & -1 \\ 4 & -15 & -14 \\ 8 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, $(AB)C = \begin{pmatrix} -7 & 42 \\ 15 & 108 \end{pmatrix}$,

$B(AD) = \begin{pmatrix} 34 & -76 & 85 \\ 34 & -146 & 51 \\ 8 & 48 & 52 \end{pmatrix}$.

(b) $(CA)_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$, $(CA)^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \end{pmatrix}$.

(c) $(AB+2C)_2 = \begin{pmatrix} 20 & 19 \end{pmatrix}$.

3. Muestre que $\mathbb{R}^{n\times n}$, para $n \geq 2$ no es un **dominio entero**. Es decir, existen matrices $n \times n$, no nulas, A y B sobre el campo $\mathbb{R}$, tales que $AB = 0_{n\times n}$. Siendo $0_{n\times n}$ la matriz nula $n \times n$.

Solución: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A, B \neq 0_{2\times 2}$ pero $AB = 0_{2\times 2}$.

4

(b) Tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

por lo que A no es invertible. Si se usa el hecho de que una matriz es invertible si y solo si su determinante es diferente de cero, entonce se tiene que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

se sigue que A no es invertible.

0 2 1

Soluciones:

5. (a) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} Adj(A) = \dfrac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

por lo que A no es invertible.

También, observando que la fila 3 es el doble de la fila 2, se tiene que las filas son l.d por lo que se concluye que la matriz no es invertible, así se evita hacer los cálculos hechos arriba.

(c) Resuelva, usando Gauss-Jordan,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

obteniendo

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

por lo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(d) Se tiene que $\det(A) = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-2(3)) = 1-1 = 0$ (pues en $\mathbb{Z}_5$, $2(3) = 1$). Luego A no es invertible.

6. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Resuelva las ecuaciones:

(a) $AX = B$.

(b) $XC = I_2$.

(c) $AX = B^T$.

(d) $XA = B^T$

Soluciones:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{-2F_2+F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -1 \end{array}\right)$$

De modo que no hay solución.

(b) Aplicando transposición a $XC = I_2$, tenemos $C^T X^T = I_2^T = I_2$ la cual tiene sentido y la resolvemos para X^T:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-2F_1+F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{-1F_2}{\overset{1F_2+F_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

La matrix hallada es $X^T = \begin{pmatrix} -1-t & 1-s \\ 2-t & -1-s \\ t & s \end{pmatrix}$, con t y s reales arbitrarios.

Por lo tanto

$$X = (X^T)^T = \begin{pmatrix} -1-t & 2-t & t \\ 1-s & -1-s & s \end{pmatrix}.$$

(c) A tiene 3 filas y B^T tiene apenas 2 filas por lo que el problema no tiene sentido pues, en caso de existir X el producto AX debería tener 3 filas, como A, y B^T, el resultado esperado, solo tiene 2 filas.

(d) Aplicando transposición, se tiene $A^T X^T = B$. Proceda como en (b), resolviendo

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

que claramente es inconsistente.

8. En cada caso escoja la(s) opciones correctas (pueden ser más de una):

(a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, entonces

i. A es invertible.

ii. El sistema $AX = b$ tiene solución única, si $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

iii. Si $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, el sistema $AX = b$ tiene infinitas soluciones.

iv. • Si $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, el sistema $AX = b$ tiene infinitas soluciones o es inconsistente.

v. N.A

Justificación: Se tiene que $F_3 = F_1 + F_2$, por lo que A no es invertible.

luego el sistema no puede tener solución única.

(b) Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\det(A) \neq 0$, entonces

i. A es invertible.•

ii. $AX = b$ tiene solución única, si $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. •

iii. No existen dos columnas de A que sean iguales. •

iv. La ecuación $AX = O_{n\times 1}$ tiene como única solución la trivial. •

v. N.A

Justificación: Como $\det(A) \neq 0$, A es invertible, luego todo sistema $AX = b$ tiene solución única; en particular el sistema homogéneo cuya matriz es A tiene solamente la solución trivial. Si dos columnas fuesen iguales se tendría que $\det(A) = 0$.

(c) Si $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $2A + 3BA - CA = I_n$, entonces:

i. A es invertible.•

ii. B es invertible.

iii. $D = C - 3B - 2I_n$ es invertible y $D^{-1} = -A$.•

iv. C no es invertible.

v. N.A

Justificación: Se tiene, usando propiedades del producto matricial, que

$$(2I_n + 3B - C)A = (-D)A = I_n,$$

por lo que A es invertible con inversa $-D$. Como $(-D)A = D(-A) = I_n$ se sigue que $D^{-1} = -A$. Sobre B y C nada se puede concluir con relación a la inversibilidad.

I. Sistemas homogéneos, subespacios, dependencia e independencia lineal

1. En cada caso indique si el vector $\mathbf{v}$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{w_i}$ dados:

   (a) $\mathbf{v} = (2,3), \mathbf{w_1} = (1,2), \mathbf{w_2} = (-1,4)$.
   Solución. $\mathbf{v} = (2,3)$ es combinación lineal de $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}$ si y solo si la ecuación

   $$\alpha_1 \mathbf{w_1} + \alpha_2 \mathbf{w_2} = \mathbf{v}$$

   es consistente. Tal ecuación corresponde al sistema lineal con matriz ampliada $(\mathbf{w_1}^T \mathbf{w_2}^T | \mathbf{v}^T)$. Tenemos entonces el sistema cuadrado

   $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

   Puesto que el determinante del sistema es $4 - (-2) = 6 \neq 0$ se tiene que el sistema tiene solución única y, por tanto, es consistente. Así, $\mathbf{v}$ es combinación lineal de $\mathbf{w_1}$ y $\mathbf{w_2}$.

   (b) $\mathbf{v} = (3,4), \mathbf{w_1} = (1,2), \mathbf{w_2} = (2,4), \mathbf{w_3} = (3,5)$.
   Solución. Tenemos ahora el sistema

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

   Claramente el sistema es consistente (con infinitas soluciones) por lo que $\mathbf{v}$ es combinación lineal de $\mathbf{w_1}$ y $\mathbf{w_2}$.

   (c) $\mathbf{v} = (3,4), \mathbf{w_1} = (1,2), \mathbf{w_2} = (2,4)$.
   Solución. Ahora el sistema es

   $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

   que es inconsistente. Por lo tanto $\mathbf{v}$ no es combinación lineal de los vectores $\mathbf{w_1}$ y $\mathbf{w_2}$.

2. En cada caso indique si los vectores dados generan o no al espacio $\mathbb{R}^n$ correspondiente. Si no lo generan, halle el subespacio generado por los vectores dados.

   (a) Para $\mathbb{R}^2$:

      i. $(1,2)$ y $(2,4)$.

      Solución. Los vectores dados generan a $\mathbb{R}^2$ si, y solo si cada vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es combinación lineal de los mismos. Es decir, que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ el sistema lineal con matriz ampliada $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 4 & y \end{array}\right)$ es consistente. Haciendo $-2F_1 + F_2$ obtenemos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & y-2x \end{array}\right)$$

      Así, el sistema es consistente si, y solo si $y - 2x = 0$, por lo que no todo vector de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de los vectores dados. Solo un vector que sea solución de la ecuación homogénea $y - 2x = 0$ es combinación lineal de los vectores dados. Por lo tanto el subespacio generado por los vectores indicados es

$$\langle (1,2),(2,4) \rangle = \{(t,2t) | t \in \mathbb{R}\} = \{t(1,2) | t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,2) \rangle.$$

      También, viendo que $(2,4) = 2(1,2)$, se tiene que toda combinación lineal de los dos vectores es de la forma

$$t(1,2) + s(2,4) = t(1,2) + 2s(1,2) = (t+2s)(1,2) = r(1,2),$$

      por lo que $\langle (1,2),(2,4) \rangle = \langle (1,2) \rangle \neq \mathbb{R}^2$.
      Aún mejor, puesto que $(1,2)$ y $(2,4)$ son vectores linealmente dependientes y son dos vectores, como la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2, entonces tales vectores no pueden generar a $\mathbb{R}^2$, pues si lo hicieran serían l.i y no lo son.

      ii. $(1,2),(2,4)$ y $(-1,3)$.

      Solución. Ahora el sistema a considerar es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x \\ 2 & 4 & 3 & y \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & 0 & 5 & y-2x \end{array}\right)$$

      el cual es consistente para todo (x,y), aunque ahora tiene infinitas soluciones. Así, todo vector de $\mathbb{R}^2$ se obtiene como combinación lineal (aunque no de manera única) de los vectores $(1,2),(2,4)$ y $(-1,3)$.

Una manera más corta de establecerlo es que como $(2,4)$ y $(1,2)$ son múltiplos, el subespacio generado por los tres vectores es el mismo generado por $(-1,3)$ y uno solo de los dos vectores anteriores. Como $(-1,3)$ y $(1,2)$ (o $(2,4)$) no son múltiplos escalares, entonces son l.i y forman una base para $\mathbb{R}^2$. Así, los tres vectores generan a $\mathbb{R}^2$ pero no lo hacen de forma eficiente, basta solo solo con dos de ellos, siempre y cuando no sean $(1,2)$ y $(2,4)$.

iii. $(1,2)$ y $(-1,5)$.

Solución. Tenemos el sistema

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & x \\ 2 & 5 & y \end{array}\right)$$

Puesto que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, el sistema tiene solución única dada por

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & -1 \\ y & 5 \end{vmatrix}}{7} = \frac{5x+y}{7}, \ \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{vmatrix}}{7} = \frac{y-2x}{7}.$$

Así, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$(x,y) = \frac{5x+y}{7}(1,2) + \frac{y-2x}{7}(-1,5),$$

de modo que $(1,2)$ y $(-1,5)$ generan a $\mathbb{R}^2$.

(b) Para $\mathbb{R}^3$:

i. $(1,1,3), (-1,0,4)$

Solución. Para $(x,y,z) \in R^3$ tenemos el sistema

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 3 & 4 & z \end{array}\right) \begin{array}{c} -1F_1+F_2 \\ \longrightarrow \\ -3F_1+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 7 & z-3x \end{array}\right) \xrightarrow{-7F_2+F_3} \left(\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 4x-7y+z \end{array}\right).$$

Este sistema es consistente si, y solo si $4x - 7y + z = 0$. Así, los vectores dados no generan a $\mathbb{R}^3$.

Más rápido hubiese sido que como la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, dos vectores no pueden generarlo.

El subespacio generado por los dos es

$$\begin{aligned} \langle(1,1,3),(-1,0,4)\rangle &= \{(t(1,1,3)+s(-1,0,4)|t,s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(t,s,7s-4t)|t,s \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(1,0,-4),(0,1,7)\rangle \end{aligned}$$

3. En cada caso indique si la proposición dada es verdadera o falsa. Justifique sus respuestas dando una demostración o un contraejemplo.

   (a) Todo subespacio de $\mathbb{R}^n$ contiene al vector cero.
   Solución. Verdadero. Todo subespacio es un espacio vectorial y, por tanto debe contener al vector nulo. Si se prefiere, puede usarse el hecho de que es no vacío, por lo que existe al menos un vector v en dicho subespacio y, puesto que es cerrado, se tiene que $0v = (0, 0, \ldots, 0)$ está en el subespacio.

   (b) Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $0_{\mathbb{R}^n} \in S$, entonces S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
   Solución. Falso. Por ejemplo $T = \{(0, 0), (1, 2)\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ ya que $2(1, 2) = (2, 4) \notin T$.

   (c) El conjunto $\{(t, t + 2)|t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.
   Solución.Falso. $(0, 0)$ no está en el conjunto pues si lo estuviera debería existir un escalar t tal que $t = 0 = t + 2$; es decir $0 = 2$ (o $0 = -2$)

   (d) El conjunto solución de un sistema lineal $m \times n$ consistente es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
   Solución. Falso. Si el sistema no es homogéneo, entonces el conjunto solución no contiene al vector nulo. Por ejemplo, si una ecuación del sistema, digamos en $\mathbb{R}^2$, es $x + y = 2$, entonces $(0, 0)$ no es solución de la ecuación y, por tanto, no lo es del sistema.

   (e) La unión de dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
   Solución. Falso. $S = \{(t, 0)|t \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{(t, 2t)|t \in \mathbb{R}\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$. Ahora $(1, 0), (1, 2) \in S \cup T$ pero $(1, 0) + (1, 2) = (2, 2) \notin S \cup T$.

   (f) Si V, U son subespacios de $\mathbb{R}^n$ y $V + U = \{\mathbf{v} + \mathbf{u}|\mathbf{v} \in V, \mathbf{u} \in U\}$, entonces $V + U$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
   Solución. Verdadero. $(0, \ldots, 0) \in V, (0, \ldots, 0) \in U$ por lo que $(0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0) + (0, \ldots, 0) \in V + U$, así $V + U \neq \emptyset$.
   Ahora, sean $w_1, w_2 \in V + U$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces existen $v_1, v_2 \in V, u_1, u_2 \in U$ tales que
   $$w_1 = v_1 + u_1, w_2 = v_2 + u_2.$$
   Por lo tanto
   $$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= (v_1 + u_1) + (v_2 + u_2) \\ &= (v_1 + v_2) + (u_1 + u_2) \\ \alpha w_1 &= (\alpha v_1) + (\alpha u_1) \end{aligned}$$

Puesto que U, V son subespacios, se tiene que $v_1 + v_2 \in V, u_1 + u_2 \in U, \alpha v_1 \in V, \alpha u_1 \in U$, de donde se sigue que $w_1 + w_2, \alpha w_1 \in V + U$.

4. En cada caso indique si el conjunto de vectores dados es linealmente dependiente o independiente.

   (a) $\{(0,0)\}$. **Solución.** L.D. Pues $1(0,0) = (0,0)$ (Recordar que un solo vector es l.d si y solo si es el vector nulo).

   (b) $\{(3,5)\}$.**Solución.** L.I (no es el vector nulo)

   (c) $\{(0,0),(1,2)\}$. **Solución.** L.D

   (d) $\{(1,2),(2,4)\}$. **Solución** L.D. Son múltiplos escalares el uno del otro.

   (e) $\{(1,2),(3,7)\}$. **Solución.** L.I Pues $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ (o, simplemente, no son múltiplos).

   (f) $\{(1,3),(2,5),(-3,8)\}$. **Solución.** L.D. Son tres vectores en $\mathbb{R}^2$.

   (g) $\{(1,1,3),(2,3,5),(5,6,14)\}$. **Solución.** L.d. Pues $(5,6,14) = 3(1,1,3) + (2,3,5)$. También puede calcularse el determinante de la matriz con los vectores transpuestos como columnas (o los vectores como filas) y verificar que es cero.

5. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Demuestre:

   (a) Si $S = \emptyset$, entonces S es l.i.
   Solución. Puesto que $\emptyset$ no tiene elementos, no existen vectores $v_1, \ldots, v_m$ y escalares, no todos nulos, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, tales que

   $$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = (0, \ldots, 0).$$

   Por lo tanto $\emptyset$ no es l.d, luego es l.i.

   (b) Si $0_{\mathbb{R}^n} \in S$, entonces S es linealmente dependiente.
   Solución. Claramente $1(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ es una combinación lineal nula no trivial de elementos de S.

   (c) Si S es l.d, entonces todo *superconjunto* de S es l.d.
   Solución. Si S es l.d existen vectores $v_1, \ldots, v_m \in S$ y escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, no todos cero, tales que

   $$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

   Si $T \supseteq S$, entonces $v_1, \ldots, v_m \in T$ y se sigue que T es l.d.

(d) Si S es l.i, entonces todo subconjunto de S es l.i.
Solución. Si S es l.i y $M \subseteq S$, entonces M no puede ser l.d pues si lo fuera, por el item anterior, entonces S (superconjunto de M) también lo fuera.

6. Encuentre una base y la dimensión para el subespacio solución del sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 & = & 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Solución. Resolviendo el sistema homogéneo, la forma escalonada reducida de la mariz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Así, el espacio solución del sistema es

$$S = \{(-5t, 4t - s, s, t) | t.s \in \mathbb{R}\} = \langle (-5, 4, 0, 1), (0, -1, 1, 0) \rangle$$

Puesto que los dos generadores no son múltiplos, forman una base para S y $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 2$.

7. ¿Cuál es la dimensión de $\langle (1, 2, 3, 5), (-1, 1, 0, 4), (1, 5, 6, 14) \rangle$?
Solución: Claramente la dimensión es menor o igual a tres. Para que sea 3 debe cumplirse que los tres vectores sean l.i. Pero son l.d. y, en este caso, uno cualquiera de los tres es combinación lineal de los otros dos. En particular,

$$(1, 5, 6, 14) = 2(1, 2, 3, 5) + (-1, 1, 0, 4),$$

por lo que $v = (1, 2, 3, 5)$ y $w = (-1, 1, 0, 4)$ generan al subespacio generado por los tres y son l.i, por lo que la dimensión pedida es 2.

.