Universidad del Norte
Departamento de Matemáticas y Estadística
Álgebra lineal
Resumen de temas para el parcial uno.

I. Preliminares.

1. Una **operación binaria** es una función

$$*: A \times B \longrightarrow C$$

siendo A, B y C conjuntos no vacíos. Si $A = B = C$ decimos que $*$ es una **ley de composición interna**.

2. Si $*$ es una ley de composición interna en el conjunto A, entonces $*$ es:

- **Asociativa** si, y solo si para toda terna $x, y, z \in A$ se cumple

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

- **Conmutativa** si, y solo si para todo $x, y \in A$ se tiene

$$x * y = y * x.$$

- **Modulativa** si, y solo si existe $e \in A$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$x * e = e * x = x.$$

El elemento e (que es único) es el **elemento neutro** para $*$. La propiedad modulativa también se conoce como **existencia de elemento neutro**.

- **invertiva** si, y solo si es modulativa, con neutro e, y para todo $x \in A$ existe $y \in A$ tal que

$$x * y = y * x = e.$$

El elemento y, que depende de x, es denominado un **inverso**(bajo $*$) de x. Aunque la operación no sea invertiva, por lo menos el neutro e tiene un inverso (el mismo e). Un elemento en A que tenga un inverso se denomina **invertible** o regular. En una estructura asociativa, si el inverso de un elemento existe es único.

- **Distributiva con relación a una ley de composición interna $\diamond$ en** A si, y solo si para todo $x, y, z \in A$ se satisfacen

$$\begin{aligned} x * (y \diamond z) &= (a * y) \diamond (x * z) \\ (x \diamond y) * z &= (x * z) \diamond (y * z) \end{aligned}$$

Si $B \subseteq A$ decimos que B es **cerrado** (bajo $*$) si, y solo si para todo $x, y \in B$ se cumple que

$$x * y \in B.$$

Es decir, la restricción de $*$ al conjuunto B es una ley de composición interna en B (si B es no vacío).

3. Si $*$ es una ley de composición interna en A, diremos que la estructura $(A, *)$ es un **grupoide**(o **magma**). Un grupoide es un

    - **semigrupo** si, y solo si es un grupoide asociativo (es decir, la ley de composición interna es asociativa).
    - **monoide** si, y solo si es un semigrupo modulativo.
    - **grupo** si, y solo si es un monoide invertivo.
    - **grupo abeliano**(o conmutativo) si, y solo si es un grupo conmutativo.

4. Una estructura aditiva-multiplicativa $(R, +, \cdot)$ es un anillo si, y solo si

    - $(R, +)$ es un grupo abeliano.
    - $\cdot$ es asociativa y distributiva con relación a la adición.

    Si $(R, +, \cdot)$ es un anillo y $\cdot$ es, además, conmutativa (o modulativa) decimos que es un **anillo conmutativo**(o, respectivamente, con **elemento identidad**, siendo este el neutro multiplicativo).
    Un **campo** o **cuerpo** es un anillo conmutativo con elemento identidad $1 \neq 0$ (0 y 1 son los neutros aditivo y multiplicativo, respectivamente) tal que todo elemento $x \neq 0$ tiene un inverso multiplicativo (se dice entonces que es un anillo conmutativo **con división**).

5. **Ejemplos**:

    (a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con identidad.

    (b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ son campos (racionales, reales y complejos, respectivamente).

(c) Para $n \geq 2$ sea $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Si se definen $x+y$ y $x \cdot y = xy$ como los residuos de dividir entre n la suma y el producto usuales de x con y, respectivamente, entonces $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con identidad.

Para cada x en $\mathbb{Z}_n$, su inverso aditivo es $-x = n - x$. x es invertible multiplicativamente si, y solo si x es *primo relativo* con n; es decir, el único divisor común positivo de x y n es 1.

Si p es un número primo (un natural mayor que 1 y tal que sus únicos divisores positivos son 1 y el mismo p) entonces todo $x \in \mathbb{Z}_p, x \neq 0$, es invertible multiplicativamente y $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ es un campo (finito).

6. **Ecuación** $ax = b$ **en** $\mathbb{Z}_n$.

En este caso, si n es relativamente pequeño puede usarse el método exhaustivo (*fuerza bruta*) para buscar las soluciones, reemplazando x por los n elementos de $\mathbb{Z}_n$. Sin embargo, si a es primo relativo con n, claramente la solución es única y está dada por

$$x = a^{-1}b = ba^{-1}.$$

Por ejemplo, $3x = 5$ en $\mathbb{Z}_8$ tiene como única solución a

$$x = 3^{-1}(5) = 3(5) = 7.$$

En general, se puede probar que $ax = b$ tiene solución en $\mathbb{Z}_n$ si, y solo si el **máximo común divisor** de a y n divide a b y que, en tal caso, el número de soluciones coincide con el máximo común divisor. Por ejemplo, $6x = 15$ en $\mathbb{Z}_{21}$ tiene exactamente 3 soluciones. Por otra parte, la ecuación $5x = 6$ en $\mathbb{Z}_{15}$ no tiene solución (es inconsistente).

II. Sistemas de ecuaciones lineales.

1. **El espacio $\mathbb{R}^n$.**

(a) Si $\mathbb{K}$ es un campo cualquiera y $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\}.$$

Cada elemento $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ es una n-ada con componentes sobre $\mathbb{K}$. Esto significa que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ entonces

$$x = y \iff x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \ldots x_n = y_n.$$

Es decir, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ debe tenerse $x_i = y_i$.

Adición, multiplicación por escalares y producto escalar (o producto punto).

Para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ definimos

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) && (1) \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) && (2) \\ x \bullet y &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i && (3) \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \end{aligned}$$

(b) Con las operaciones de adición, ((1)), y multiplicación por escalares, ((2)), $\mathbb{K}^n$ es un **espacio vectorial sobre** $\mathbb{K}$. Esto significa

- $(\mathbb{K}^n, +)$ es un grupo abeliano.
- Para todo $x, y \in \mathbb{K}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene

$$\begin{aligned} \alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x \\ 1x &= x \\ (\alpha + \beta)x &= \alpha x + \beta x \\ \alpha(x + y) &= \alpha x + \alpha y. \end{aligned}$$

Los elementos de un espacio vectorial son denominados **vectores** y los de un campo son **escalares**. El neutro aditivo es el **vector nulo**. En $\mathbb{K}^n$ es el vector $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0)$. En un espacio vectorial V es notado 0_V.

(c) El producto escalar ((3)) satisface en $\mathbb{R}^n$ las siguientes propiedades (v, w, u son vectores en $\mathbb{R}^n$ y α, β son números reales).

$$\begin{aligned} v \bullet v &\geq 0 && (4) \\ v \bullet v = 0 &\iff v = (0, 0, \dots, 0) && (5) \\ \alpha(v \bullet w) &= (\alpha v) \bullet w && (6) \\ &= v \bullet (\alpha w) \\ v \bullet w &= w \bullet v && (7) \\ v \bullet (w + u) &= (v \bullet w) + (v \bullet u) && (8) \end{aligned}$$

Nota: Las propiedades anteriores, excepto posiblemente ((4)) y ((5)), se cumplen en $\mathbb{K}^n$ si $\mathbb{K}$ es un campo cualquiera. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}_7^2$ se tiene que $(1,1) \bullet (1,1) = 0$, pero $(1,1) \neq (0,0)$. Igualmente $(1,0) \bullet (1,0) = 1$ pero $\mathbb{Z}_2$ no es un *campo ordenado*, de modo que 1 no es ni positivo ni negativo.

2. **Ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ (en $\mathbb{K}^n$).**

   (a) Una **ecuación lineal en** $\mathbb{R}^n$ (en $\mathbb{K}^n$) es una ecuación de la forma

   $$a \bullet x = b \tag{9}$$

   donde $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$ (o $a \in \mathbb{K}^n, b \in \mathbb{K}$). La incógnita vectorial es

   $$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

   La ecuación (9) puede escribirse en la forma escalar

   $$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{10}$$

   la que usualmente es denominada **ecuación lineal en** $x_1, x_2, \ldots, x_n$**.** Si no es claro el número de variables o incógnitas escalares se especifica el **universo** de la ecuación como $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{K}^n$).

   (b) Una **solución** de (9) o (10) es un vector

   $$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{o } u \in \mathbb{K}^n$$

   tal que

   $$a \bullet v = b \ \ (\text{ esto es, } \ a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots a_nu_n = b)$$

   es una proposición verdadera.
   El **conjunto solución** de (9)(de (10)) es el conjunto de todas las soluciones. La ecuación es **consistente** si tiene al menos una solución (conjunto solución no vacío) y es **inconsistente** si no es consistente (conjunto solución vacío).
   Dos o más ecuaciones (con el mismo universo) son **equivalentes** si, y solo si tienen el mismo conjunto solución.

   (c) Dada la ecuación lineal (10)(o (9)) obtenemos una ecuación equivalente si se hace una cualquiera de las siguientes transformaciones

   - Sumar en ambos miembros una misma expresión (en las variables escalares o en la variable vectorial).
   - Multiplicar ambos miembros por un escalar diferente de cero.

(d) **Técnicas de solución de (10) (o (9))**

- Si $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0, 0, \ldots, o)$, entonces el conjunto solución es

$$\begin{aligned} S &= \mathbb{R}^n, \ \text{ si, y solo si } \ b = 0 \ \ (\textbf{Ecuación cero}). \\ S &= \emptyset, \ \text{ si, y solo si } \ b \neq 0 \ \ (\textbf{Ecuación inconsistente.)} \end{aligned}$$

- Si $a \neq (0, 0, \ldots, 0)$, existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a_k \neq 0$. Entonces:
  i. Si $n = 1$ se tiene $a = a_1 \in \mathbb{R}, x = x_1 \in \mathbb{R}$ y el conjunto solución es
  $$S = \{ba^{-1}\}.$$
  ii. Si $n > 1$ podemos despejar x_k en términos de las demás incógnitas, que tomarán valores arbitrarios (variables libres). El conjunto solución es
  $$S = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| x_i = t_i \in \mathbb{R} \ \text{ para todo } \ i \neq k, x_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{-a_i}{a_k} t_i \right\}.$$

  Nota. En el caso de que la ecuación sea en $\mathbb{K}^n$, el número de soluciones puede ser finito si el campo lo es.

3. **Ecuaciones homogéneas. Subespacios.**

(a) La **ecuación homogénea** asociada a (9) (o (10)) es

$$a \bullet x = 0 \tag{11}$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \tag{12}$$

(b) Tenemos los siguientes resultados importantes.

- El conjunto solución de la ecuación homogénea (11) es un conjunto no vacío (tiene al menos la solución trivial $(0, 0, \ldots, 0)$) y **cerrado**(la suma de dos soluciones es una solución y la multiplicación de una solución por un escalar es también una solución). En general, un subconjunto S de un espacio vectorial es **cerrado** si y solo si satisface que para todo par de vectores $v_1, v_2 \in S$ y todo escalar α:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &\in S \\ \alpha v_1 &\in S \end{aligned}$$

- Si la ecuación lineal (9) es consistente, toda solución es la suma de una solución particular con una solución de la homogénea asociada.
- Si S es un subconjunto no vacío y cerrado de un espacio vectorial V, entonces S es también un espacio vectorial. Decimos entonces que S es un **subespacio** de V, notado $S \preceq V$.
  Para todo espacio vectorial V, se tiene que $\{0_V\}$ (**subespacio nulo**) y V mismo son subespacios de V (subespacios **triviales**).
- La intersección de una familia cualquiera de subespacios de un espacio vectorial V es también un subespacio de V.

4. **Sistemas de ecuaciones lineales.**

   (a) Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathbb{K}^n$, $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$, siendo $\mathbb{K}$ un campo, la colección finita de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} A_1 \bullet x = b_1 \\ A_2 \bullet x = b_2 \\ \quad \vdots \\ A_m \bullet x = b_m \end{cases} \tag{13}$$

   es denominada, por brevedad, un **sistema lineal** $m \times n$ (o un **sistema de** m **ecuaciones lineales en** $\mathbb{K}^n$).

   (b) Si para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ tenemos

$$A_i = (a_{i1}, a_i 2, \ldots, a_{in}),$$

   entonces la forma escalar de (13) es

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{14}$$

   al que se acostumbra denominar **sistema lineal de** m **ecuaciones en** n **variables o incógnitas (escalares).**

   (c) La **matriz ampliada** de (13) (o (14)) es el arreglo rectangular de m filas (o renglones) y $n+1$ columnas

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

donde cada fila (horizontal) es un vector de $\mathbb{K}^{n+1}$ y corresponde o simboliza a una ecuación del sistema. Por su parte, cada columna (vertical),excepto la última, contiene los coeficientes de una misma incógnita. La **matriz del sistema** es la matriz de m filas y n columnas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(d) Si para $i = 1, \dots, m$, s_i es el conjunto solución de la ecuación número i del sistema (13) (o (14)), entonces el conjunto solución del sistema es

$$S = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m = \bigcap_{1=1}^{m} S_i.$$

Dos sistemas son **equivalentes** si, y solo si tienen el mismo conjunto solución. Un sistema es **consistente** si su conjunto solución es no vacío e **inconsistente**, en caso contrario.
Tenemos los siguientes resultados importantes (identificamos ecuaciones de sistemas lineales con renglones de su matriz ampliada) en la solución de sistemas lineales:

- Si $m > 1$, podemos intercambiar dos renglones cualesquiera sin que cambie el conjunto solución. Se escribirá $F_i \longleftrightarrow F_j$ para indicar que los renglones j e i se intercambian.
- Si se reemplaza un renglón cualquiera por un múltiplo escalar no nulo, el conjunto solución no cambia. Se escribirá αF_i para notar tal operación.
- Si $m > 1$, un renglón cualquiera se puede reemplazar por el que resulte de sumarle un múltiplo escalar de cualquier otro renglón. Usaremos la notación $\alpha F_i + F_j$ para indicar que el renglón número j es reemplazado

por lo que resulta de sumarle el renglón i previamente multiplicado por α.

Nota: Las "operaciones" anteriores son denominadas **operaciones elementales de renglón.** También se deben tener en cuenta, si es necesario:

- Si una ecuación del sistema es inconsistente, todo el sistema lo es.
- Si $m > 1$ y un renglón es nulo (ecuación cero) el conjunto solución es el mismo del sistema que resulta eliminando tal renglón o ecuación.

(e) **Formas escalonadas y forma escalonada reducida.**
Una matriz (ampliada de un sistema) está en una **forma escalonada** si y solo si satisface:

i. No tiene renglones nulos por encima de un renglón no nulo.
ii. En cada renglón no nulo el primer número distinto de cero es 1 (se denomina **uno principal**).
iii. Los unos principales están **escalonados**. Esto significa que para renglones no nulos consecutivos el uno principal del renglón inferior está en una columna situada hacia la derecha de la correspondiente al uno principal del renglón superior.

La matriz está en **forma escalonada reducida** si está en forma escalonada y en cada columna que contenga un uno principal las demás componentes son ceros.
En una forma escalonada (o en la escalonada reducida) distinguiremos dos clases de variables o incógnitas:

- **Variables independientes** (o **libres**): variables cuyas columnas no tienen uno principal.
- **Variables dependientes** (o **principales**): variables cuyas columnas tienen uno principal.

La presencia de variables libres indica que el sistema no tiene solución única.

(f) **Técnicas de eliminación.** Para resolver un sistema lineal trabajamos con su matriz ampliada y la llevamos a una forma matricial tal que el conjunto solución sea relativamente fácil de determinar. En particular, formas matriciales adecuadas son las formas escalonada y escalonada reducida. Para llevar la matriz a una de esas formas se aplica el **algoritmo**

de eliminación de Gauss o de **Gauss-Jordan** (véase texto guía). En el primer caso, se resuelve la última ecuación no nula y se aplica **sustitución regresiva**. En el segundo, no hace falta aplicar sustituciones y el conjunto solución se puede determinar fácilmente.
Tenemos las siguientes posibilidades para el conjunto solución:

i. **Sistemas con solución única.** Una forma escalonada es

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si el sistema es $m \times n$ se debe tener entonces $m \geq n$ y la matriz indicada arriba tiene $m - n$ renglones nulos. Hay exactamente n unos principales (uno en cada columna de las variables).

ii. **Sistemas inconsistentes**. En una forma escalonada o escalonada reducida de la matriz ampliada el último renglon no nulo es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mid & 1 \end{pmatrix}$$

iii. **Sistemas con más de una solución.** Son sistemas consistentes tales que en una forma escalonada o escalonada reducida hay al menos una variable libre (columnas de variables sin uno principal). En tal caso, las variables libres pueden tomar valores arbitrarios sobre el campo correspondiente y el sistema tendrá un conjunto solución infinito si el campo lo es (o finito si lo es el campo).

(g) **Determinantes** 2×2 **y regla de Cramer.** En el caso particular de un sistema lineal

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{15}$$

el sistema tiene solución única si, y solo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Tal escalar es denominado **determinante del sistema** o de la **matriz del sistema** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Lo notaremos como

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

En caso de solución única esta viene dada por (**Regla de cramer**)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\
x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}
\end{aligned}
$$