UNIVERSIDAD DEL NORTE
Departamento de Matemáticas y Estadística.
Álgebra Lineal.

Resumen de temas del parcial dos

I. Sistemas homogéneos y subespacios de $\mathbb{R}^n$.

1. **Definiciones básicas.**

   (a) Para el sistema lineal $m \times n$:
   $$AX = b \tag{1}$$
   el sistema homogéneo asociado es el sistema
   $$AX = 0_{\mathbb{R}^{m\times 1}} \tag{2}$$

   (b) Sean $v_1, v_2, \ldots, v_m, v \in \mathbb{R}^n, S \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces

   - **Combinación lineal.** v es combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ si y solo si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tales que
   $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = v \tag{3}$$
   La ecuación (en los escalares α_i) (3) es equivalente al sistema lineal $n \times m$ con matriz ampliada
   $$(v_1^T v_2^T \ldots v_m^T | v^T) \tag{4}$$
   - **Dependencia lineal.** Los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ son **linealmente dependientes** (l.d) si y solo si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, no todos nulos tales que
   $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0_{\mathbb{R}^n} \tag{5}$$
   Es decir, existe una combinación lineal nula no trivial de los vectores. La ecuación (5) equivale así al sistema homogéneo $n \times m$ con matriz ampliada
   $$\left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ v_1^T v_2^T \ldots v_m & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{array}\right) \tag{6}$$
   - **Independencia lineal.** Los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ son **linealmente independientes** si y solo si no son l.d.
   - Un conjunto S es l.d si y solo si existen vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k \in S$ que son l.d. S es l.i si no es l.d
   - **Subespacio.** S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, notado $S \preceq R^n$, si y solo si es no vacío y cerrado para las operaciones de espacio vectorial. Así un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que también es un espacio vectorial.
   $\{(0, 0, \ldots, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ y $\mathbb{R}^n$ son subespacios (triviales) de $\mathbb{R}^n$.
   - Si $S \preceq \mathbb{R}^n$ y $v_1, v_2, \ldots, v_m \in S$, entonces $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ genera a S si y solo si todo vector de S es combinación lineal de los elementos de M.

2. **Resultados importantes.**

   - El conjunto solución de un sistema homogéneo en $\mathbb{R}^n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
   - Toda solución de un sistema lineal $m \times n$ consistente es de la forma $v_p + v_H$, donde v_p es una solución particular cualquiera y v_H es una solución del sistema homogéneo asociado.
   - En un sistema homogéneo $m \times n$, si n (número de variables) es mayor que m (número de ecuaciones), entonces el sistema tiene soluciones no triviales (infinitas en el caso de $\mathbb{R}^n$).
   - Si $v_1, v_2, \ldots, v_m \in R^n$, entonces

     (a) Si $m = 1$, v_1 es ld si y solo si v_1 es el vector nulo.

     (b) Si $m > 1$, los vectores son l.d si y solo si al menos uno de los vectores es combinación lineal de los demás. En particular, si $m = 2$, v_1 y v_2 son l.d si y solo si uno de los dos es múltiplo del otro.

     (c) Si $m = n$ los vectores son ld si y solo si $\det(v_1^T v_2^T \ldots v_m^T) = 0$..

     (d) Si $m > n$, los vectores son l.d.

     (e) El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Se denomina **subespacio generado** por lo vectores. Notación

     $$\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_m v_m | \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$$

     La intersección de una familia cualquiera de subespacios (finita o infinita) de $\mathbb{R}^n$ es también un subespacio.

     En general, el subespacio generado por un conjunto es la intersección de todos los subespacios que contienen al conjunto. Si el conjunto es no vacío, el subespacio generado es el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos del conjunto. Para S, notamos el subespacio generado por S como $\langle S \rangle$. En particular $\langle \emptyset \rangle = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$
   - Todo conjunto que contenga al vector nulo es l.d
   - Todo subconjunto de un conjunto l.i es l.i y todo superconjunto de un conjunto l.d es l.d.

3. **Bases y dimensión**. Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, una **base** para S es un conjunto de generadores l.i. Se tiene

   - Dos bases para S tienen el mismo número de elementos. El número de elementos de una base para S es la **dimensión** de S, notada $\dim_{\mathbb{R}}(S)$.
   - Para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, si e_i denota al vector en el cual la componente número i es 1 y las demás son ceros, entonces

     $$B_S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

     es una base para $\mathbb{R}^n$. Esa es la base **estándar**. Así, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$.

- $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base para $\mathbb{R}^n$ si y solo si

$$\det(v_1^T v_2^T \ldots v_n^T) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0$$

- Si $\dim_{\mathbb{R}}(S) = m$, entonces si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq S$:
  B es base de S si y solo si $\langle B \rangle = S$ si y solo si B es l.i

- Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, son equivalentes:
  (a) A es invertible.
  (b) Toda ecuación $AX = B$, con $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tiene solución única $X = A^{-1}B$. (incluye sistemas lineales).
  (c) Las filas (o columnas transpuestas) de A son l.i.
  (d) las filas (o columnas transpuestas) de A generan a $\mathbb{R}^n$.
  (e) Las filas (o columnas transpuestas) de A forman una base para $\mathbb{R}^n$.

1. Definiciones y notaciones básicas

(a) El conjunto de las matrices $m \times n$ (m filas, n columnas) sobre el campo $\mathbb{K}$, se notará $\mathbb{K}^{m\times n}$. Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, entonces para $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$:

- La componente de la fila i. columna j, se notará $A(i, j) = a_{ij}$.
- La fila i de A se notará $A_i = (A(i, 1), A(i, 2), \dots, A(i, n)) = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$.
- La columna j de A se notará

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} A(1,j) \\ A(2,j) \\ \vdots \\ A(m,j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

(b) $\mathbb{K}^{m\times n}$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas por ($A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\alpha \in \mathbb{K}$)

$$(A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j) \quad (1)$$
$$(\alpha A)(i, j) = \alpha A(i, j) \quad (2)$$

Es decir, en la adición, se suman componente a componente y en la multiplicación por escalares cada componente se multiplica por el escalar.

(c) **Transposición.** Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, la **matriz transpuesta** de A, notada A^T es la matriz en $\mathbb{K}^{n\times m}$, definida por

$$A^T(i, j) = A(j, i), \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Es decir, al transponer una matriz las filas de la transpuesta son las columnas (transpuestas) de la matriz que se transpone.

(d) **Producto matricial.** Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times p}$, entonces para $i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots p\}$ se definen

$$(AB)(i,j) = A_i B^{(j)} = A_i \bullet \left(B^{(j)}\right)^T .$$

Nótese el siguiente esquema en torno a las condiciones requeridas para que el producto matricial esté definido

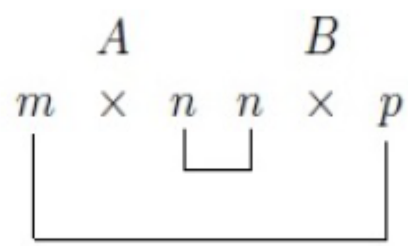

Figure 1: Producto matricial.

Es decir, el producto está definido si el número de columnas de A (el primer factor) es igual al de filas de B (el segundo factor). O, lo que es lo mismo, que cada fila del primer factor esté en el mismo espacio (tenga el mismo número de componentes) que las columnas transpuestas del segundo factor (en este caso, ese espacio es $\mathbb{K}^n$). Por ota parte, el producto resultante es una matriz $m \times p$; es decir, con tantas filas como A, el primer factor, y tantas columnas como B, el segundo factor.

2. **Propiedades básicas de las operaciones.**
$\mathbb{K}^{m\times n}$ satisface las propiedades de espacio vectorial. Además, **si las operaciones que se indican en cada caso están definidas** se tiene, para matrices A, B y C y $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$
\begin{aligned}
(A+B)_i &= A_i + B_i && (3)\\
(\alpha A)_i &= \alpha A_i && (4)\\
(A^T)_i &= (A^{(i)})^T && (5)\\
(A^T)^{(j)} &= (A_j)^T && (6)\\
(A+B)^T &= A^T + B^T && (7)\\
(\alpha A)^T &= \alpha A^T && (8)\\
(AB)_i &= A_i B && (9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(AB)^{(j)} &= AB^{(j)} && (10)\\
(AB)^{T} &= B^{T}A^{T} && (11)\\
\alpha(AB) &= (\alpha A)B = A(\alpha B) && (12)\\
(AB)C &= A(BC) && (13)\\
A(B+C) &= AB+AC && (14)\\
(A+B)C &= AC+BC && (15)
\end{aligned}
$$

Debe notarse que el producto no es conmutativo. De igual manera puede tenerse que un producto AB sea la matriz nula sin que alguna de las dos sea una matriz nula.

3. Ecuaciones matriciales. Matriz identidad y matrices invertibles.

- Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{m\times p}$ (es decir, con el mismo número de filas), la ecuación matricial $AX = B$ equivale a p sistemas lineales $AX^{j} = B^{j}$, con $j \in \{1, 2, \ldots p\}$, los cuales pueden resolverse simultáneamente según el esquema

$$(A|B) \overset{\text{Gauss o Gauss-Jordan}}{\longrightarrow} \cdots (R|C),$$

  donde R es una forma escalonada (o la forma escalonada reducida) de A y C es la matriz que se obtiene de B con las mismas operaciones que originan R de A.

- Una ecuación matricial de la forma $XA = B$, teniendo A y B el mismo número de columnas, se puede transformar en una ecuación como la anterior, aplicando transposición. Queda entones

$$A^{T}X^{T} = B^{T}$$

  se resuelve hallando, si existe, X^{T} y luego se calcula $X = (X^{T})^{T}$.

- **Matriz identidad.** Si $n \in \mathbb{N}$, la **matriz identidad** $n \times n$ es la matriz I_n, tal que para todo i, j satisface

$$I_n(i,j) = (\delta_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = j \\ 0 & \text{si } \ i \neq j \end{cases}$$

Se tiene que si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, entonces

$$\begin{aligned} AI_n &= A & (16)\\ I_m A &= A & (17)\end{aligned}$$

de modo que para matrices $m \times n$, I_n es **neutro multiplicativo a derecha** e I_m es **neutro multiplicativo a izquierda**. En particular, si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, entonces

$$AI_n = I_n A = A \tag{18}$$

Es decir, I_n es neutro multiplicativo (uno matricial) en $\mathbb{K}^{n\times n}$.

- **Matrices invertibles.** Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, A es **invertible** o **no singular** si, y solo si existe $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Es suficiente y necesario con una sola de las condiciones $AB = I_n$ y $BA = I_n$. Si tal matriz existe es única y se denomina la matriz **Inversa** de A. Se nota A^{-1}. Así

$$B = A^{-1} \iff AB = I_n \iff BA = I_n \iff A = B^{-1}.$$

Por la unicidad, A es invertible si, y solo si la ecuación $AX = I_n$ tiene solución única (la inversa de A). El esquema de cálculo es entonces (si A es invertible

$$(A|In) \quad \overset{\text{Gauss-Jordan}}{\longrightarrow} \quad \cdots (I_n|A^{-1}),$$

- **Caso 2×2.** Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, A es invertible si, y solo si $\det(A) \neq 0$. En tal caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}.$$

Para matrices $n \times n$ con $n > 2$, el cálculo de la inversa (o el determinar si no es invertible) se hace resolviendo la ecuación $AX = I_n$.

- **Propiedades de la inversa.** Supongamos $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ matrices invertibles y $\alpha \neq 0$. Entonces $A^{-1}, \alpha A, A^T$ y AB son invertibles y

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{-1} &= A & (19)\\ (\alpha A) &= \frac{1}{\alpha}A^{-1} & (20)\\ (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T & (21)\\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} & (22)\end{aligned}$$

Las siguientes proposiciones son equivalentes (A es una matriz cuadrada $n \times n$):

(a) A es invertible.

(b) $\det(A) \neq 0$.

(c) La forma escalonada reducida de A es I_n.

(d) Toda ecuación matricial $AX = B$, con $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$, tiene solución única $X = A^{-1}B$.

(e) Toda ecuación $XA = B$, con $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, tiene solución única $X = BA^{-1}$.

(f) Todo sistema lineal $AX = b$, $b \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ tiene solución única.

(g) Todo sistema homogéneo $AX = 0$ tiene como única solución la solución trivial (el vector nulo).