UNIVERSIDAD DEL NORTE
Departamento de Matemáticas y Estadística
Álgebra Lineal

Ejercicios resueltos para el final.-

8. Sea S un subconjunto no vacío de $V = \mathbb{R}^n$, definamos

$$S^{\perp} = \{v \in V | (\forall w \in S)(v \bullet w = 0)\}$$

Demuestre que S es un subespacio de V($S^{\perp}$ es denominado el **complemento ortogonal** de S) .

Solución. Claramente $0_{\mathbb{R}^n}$ es ortogonal a todo vector por lo que lo es , en particular, a todo vector de S. De modo que $S^{\perp} \neq \emptyset$. Ahora, si $v_1, v_2 \in S^{\perp}, \alpha \in \mathbb{R}$ y $w \in S$, se sigue que $v_1 \bullet w = v_2 \bullet w = 0$, de modo que

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2) \bullet w &= v_1 \bullet w + v_2 \bullet w \\ &= 0 + 0 = 0 \\ (\alpha v_1) \bullet w &= \alpha(v_1 \bullet w) \\ &= \alpha(0) = 0 \end{aligned}$$

lo que demuestra que $S^{\perp} \preceq \mathbb{R}^n$.

9. Con relación al ejercicio anterior, si $n = 2$ determine $S^{\perp}$ si:

(a) $S = \mathbb{R}^2$.
Solución. Un vector $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^{\perp}$ si y solo si es ortogonal a todo vector de $\mathbb{R}^n$. Tomando la base estándar $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, se tiene que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ debe tenerse $v \bullet e_i = v_i = 0$; es decir, v es el vector nulo. Por lo tanto

$$(\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{(0, 0, \ldots, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

En particular, $(\mathbb{R}^2)^{\perp} = \{(0, 0)\}$.

(b) $S = \{(0, 0)\}$.
Solución. En general, si $S = \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ el complemento ortogonal de S es el conjunto solución de la ecuación nula. Entonces $S^{\perp} = \mathbb{R}^n$. En particular, $\{(0, 0)\}^{\perp} = \mathbb{R}^2$.

(c) $S = \{(1, 2)\}$.
Solución. $S^{\perp} = \langle(-2, 1)\rangle = \langle(2, -1)\rangle$.

(d) $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$.
Solución. $S^{\perp}$ es el espacio solución del sistema
$(1, 0) \bullet (x, y) = 0, (0, 1) \bullet (x, y) = 0$, Es decir

$$S^{\perp} = \{(0, 0)\}.$$

(e) $S = \{v, w\}$, donde v y w son vectores cualesquiera distintos.
Solución. Como en el anterior, $S^{\perp}$ es el espacio solución del sistema homogéneo con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{c|c} v & 0 \\ w & 0 \end{array}\right)$$

Si los vectores son l.i, el complemento ortogonal es el espacio nulo. Si son l.d y al menos uno es no nulo, entonces el complemento ortogonal es de dimensión uno y es generado por un vector no nulo cualquiera ortogonal al vector no nulo. Si ambos son nulos el complemento ortogonal es todo el espacio.

10. Si $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ son vectores no nulos y no paralelos (es decir, linealmente independientes), entonces el complemento ortogonal de $S = \{v, w\}$ es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por el vector

$$\begin{aligned} v \times w &= (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1) && (1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) && (2) \end{aligned}$$

El vector $v \times w$ es denominado el **producto cruz** de v por w y puede definirse también para vectores cualesquiera v y w.

(a) Describa algebraica y geométricamente el subespacio de todos los vectores ortogonales a $(1, 2, -5)$ y $(3, 4, 6)$.
Solución.

$$\begin{aligned} \{(1, 2, -5), (3, 4, 6)\}^{\perp} &= \langle ((1, 2, -5) \times (3, 4, 6) \rangle \\ &= \langle (32, -21, -2) \rangle \\ &= \{t(32, -21, -2) | t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Geométricamente, es una recta que pasa por el origen y es paralela al vector $(32, -21, -2)$. Tal vector es normal al plano que pasa por el origen y tiene como un par de generadores justamente a los vectores $(1, 2, -5)$ y $(3, 4, 6)$. De tal forma el subespacio indicado es una recta perpendicular al plano generado por los vectores dados.

(b) Demuestre que si v y w son paralelos (distintos), entonces $v \times w = 0_{\mathbb{R}^3}$ y que

$$\{v, w\}^{\perp} = \{v\}^{\perp} = \{w\}^{\perp}.$$

Solución. Si $v \parallel w$, entonces son múltiplos escalares y en la ecuación (2), página (8), cada determinante es cero. Si $w = \alpha v$, con $\alpha \neq 0$, entonces si u es un vector ortogonal a v entonces

$$u \bullet w = u \bullet (\alpha v) = \alpha(u \bullet v) = \alpha(0) = 0.$$

De igual manera, puesto que $v = \dfrac{1}{\alpha} w$, todo vector ortogonal a w lo es a v
Se sigue que $\{v, w\}^{\perp} = \{v\}^{\perp} = \{w\}^{\perp}$.
Si los vectores son l.d se sigue de igual manera que el producto es cero. Si uno de los dos es el vector nulo, el complemento ortogonal es el del conjunto unitario formado por el vector no nulo.

(c) Demuestre que el producto cruz no es una operación ni conmutativa ni asociativa, pero que es distributiva con relación a la adición de vectores.
solución. De la ecuación (2) se sigue que $v \times w = -w \times v$, tómese por ejemplo

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{j} &= (1,0,0) \times (0,1,0) \\ &= (0,0,1) \\ \hat{j} \times \hat{i} &= (0,0,-1) \end{aligned}$$

de modo que $\hat{i} \times \hat{j} \neq \hat{j} \times \hat{i}$. Para un contraejemplo que refute la asociatividad, tome $\hat{i} \times (\hat{j} \times (1,1,0))$ y compare con $(\hat{i} \times \hat{j}) \times (1,1,0)$.

11. En el espacio real $\mathbb{R}^2$, dado un vector $v = (a, b)$ no nulo.

    (a) ¿Cuántos vectores paralelos y con norma 2 tiene v?
    Solución. Todo vector w paralelo a v y con norma 2 es de la forma $w = \|w\| U_w = 2\,(\pm U_v)$. Por lo que existen solo dos vectores con esas características (en $\mathbb{R}^2$ y, en general, en $\mathbb{R}^n$).

    (b) ¿Cuántos vectores ortogonales a v y con norma 2 existen?.
    Solución. El subespacio de los vectores ortogonales a $v = (a, b)$ es generado por $(-b, a)$ (o $(b, -a)$), de modo que todo vector ortogonal a v y con norma 2 es paralelo a $(-b, a)$. Por el ejercicio anterior existen entonces solo dos vectores ortogonales a v y con norma 2.

12. Realice el ejercicio anterior si $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
    Solución. Como en el ejercicio anterior, solo hay dos vectores paralelos a v con norma 2. Para el caso de los vectores ortogonales, el complemento ortogonal de $\{v\}$ es generado por dos vectores l.i que generan un plano que pasa por el origen y tiene como normal a v. Los vectores cuya representación canónica termine en una circunferencia de radio con centro en el origen y sobre el plano generado por tales vectores son los vectores ortogonales a v y de norma 2. Hay pues, infinitos de tales vectores.

13. Sean $v = (1, -1, 2, 3), w = (-1, 4, 0, 2)$.

(a) Encuentre un vector ortogonal a v y con norma 2.
Solución. El complemento ortogonal del conjunto $\{v\}$ tiene dimensión tres y una base para tal espacio es $\{(0,0,-3,2),(0,3,0,1),(0,2,1,0)\}$. Tómese un vector cualquiera z que esté en dicho subespacio (una combinación lineal cualquiera) y el vector $2U_z$ satisface las condiciones requeridas, por ejemplo $2\frac{1}{\sqrt{13}}(0,0,-3,2)$.

(b) Encuentre un vector de norma 3 y con la misma dirección de $v+w$.

(c) Encuentre un vector paralelo a v y con norma 5.

II. Ecuaciones de rectas y planos.

1. En cada caso encuentre una ecuación vectorial para la recta del plano que satisface las condiciones indicadas:

(a) *Pasa por el punto $P(1,2)$ y tiene pendiente 3.*
La pendiente es $m=3=\frac{3}{1}$, por lo que un vector paralelo es $v=(1,3)$, de modo que una ecuación vectorial es

$$(x,y)=(1,2)+t(1,3).$$

(b) *Pasa por el punto $P(1,2)$ y es paralela a la recta de ecuación $2x+3y=6$.*
La pendiente de la recta es la misma que la de ecuación $2x+3y=6$ y esta es equivalente a

$$y=\frac{-2}{3}x+2,$$

de modo que la pendiente es $\frac{-2}{3}$, por lo que un vector paralelo a ambas rectas es $v=(3,-2)$. Se tiene entonces que una ecuación vectorial para la recta indicada es

$$(x,y)=(1,2)+t(3,-2).$$

(c) *Pasa por el punto $P(1,2)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $2x+3y=6$.*
Como en el anterior, un vector paralelo a la recta de ecuación $2x+3y=6$ es $v=(3,-2)$. Un vector ortogonal a v es $v_1=(2,3)$ que es paralelo a la recta cuya ecuación se pide. Así, una ecuación vectorial es

$$(x,y)=(1,2)+t(2,3).$$

2. En cada caso encuentre una ecuación vectorial para la recta del espacio que satisface las condiciones indicadas:

(a) *Pasa por los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(-1,3,5)$.*
Claramente un vector paralelo a la recta es $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-2,1,2)$ (o cualquier múltiplo escalar no nulo). Dos ecuaciones vectoriales para la misma recta son:

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=(1,2,3)+t(-2,1,2)\\(x,y,z)&=(-1,3,5)+s(-2,1,2)\end{aligned}$$

(b) *La recta L que contiene al punto $P(1,2,3)$ y es paralela a la recta de ecuación $L_1 : (x,y,z) = (2+t, 3-t, 5-t)$.*
Para L_1 tenemos $(x,y,z) = (2,3,5) + t(1,-1,-1)$, por lo que un vector paralelo a L_1 y a L es $(1,-1,-1)$. Entonces una ecuación vectorial para L es

$$(x,y,z) = (1,2,3) + t(1,-1,-1).$$

3. *Demuestre que las rectas L y L_1, del ejercicio anterior, son distintas y encuentre una ecuación vectorial y una cartesiana para el plano único que las contiene.*

Como las rectas son paralelas, será suficiente con mostrar que hay al menos

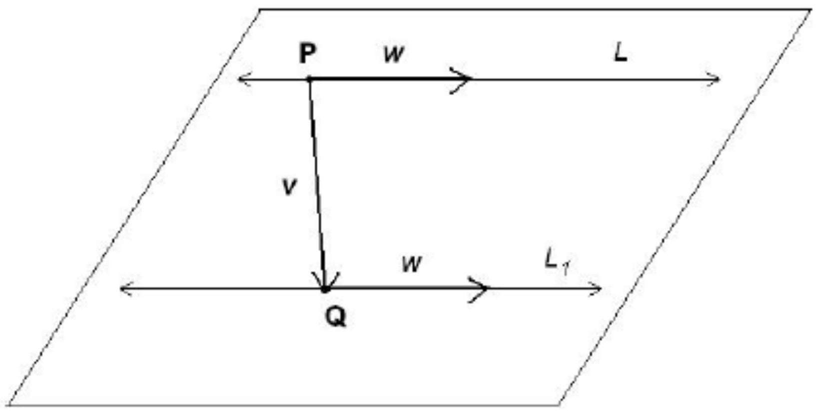


Figure 1: Plano que contiene a rectas paralelas

un punto de L que no está en L_1 o, si se prefiere, que el vector $\overrightarrow{PQ} = (1,1,2)$,

siendo $Q(2,3,5) \in L_1$, y el vector $(1,-1,-1)$ no son múltiplos escalares, lo cual es muy claro.
Si se decide por la primera opción, tenemos que $P \in L_1$ si y solo si existe un escalar t tal que

$$(2+t, 3-t, 5-t) = (1,2,3)$$

pero esto nos lleva a un sistema inconsistente $t = -1 = 1 = 2$. Para las ecuaciones del plano que contiene a las rectas (véase figura 1) se tiene que $v = \overrightarrow{PQ} = (1,1,2)$ y $w = (1,-1,-1)$ son generadores del plano y que

$$n = v \times w = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1,3,-2)$$

es una normal. Tenemos entonces

$$\begin{array}{rc} \text{Ecuación vectorial:} & (x,y,z) = (1,2,3) + t(1,1,2) + s(1,-1,-1) \\ \text{Ecuación cartesiana:} & (1,3,-2) \bullet (x,y,z) = (1,3,-2) \bullet (1,2,3) \\ \iff & x + 3y - 2z = 1 \end{array}$$

4. *Demuestre que las rectas*

$$L : (x,y,z) = (1,2,3) + t(1,-1,-1) \quad y \quad L_2 : (x,y,z) = (2-s, 1+2s, 2+s)$$

se intersectan en un único punto. Halle una ecuación vectorial y una cartesiana para el plano que las contiene.

Un punto (x,y,z) está en la intersección de las dos rectas si y solo si existen $t, s \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x,y,z) = (1,2,3) + t(1,-1,-1) = (2-s, 1+2s, 2+s) \iff \begin{cases} 1+t &= 2-s \\ 2-t &= 1+2s \\ 3-t &= 2+s \end{cases}$$

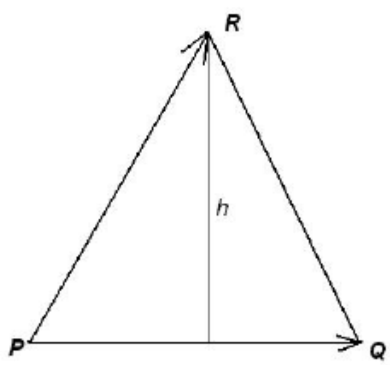
Es decir, si y solo si el sistema $\begin{cases} t+s &= 1 \\ t+2s &= 1 \\ t+s &= 1 \end{cases}$ es consistente. Resolviendo el sistema se obtiene como única solución $t = 1, s = 0$, de donde se obtiene que existe un único punto común
$(1,2,3) + 1(1,-1,-1) = (2-0, 1+0, 2+0) = (2,1,2)$.
Nótese que un vector paralelo a L es $v = (1,-1,-1)$ y un vector paralelo a L_2 es $w = (-1,2,1)$. Como v y w no son paralelos entre sí pero son paralelos al plano, se tiene que v y w forman un par de generadores para el plano que contiene a las dos rectas. Así, una ecuación vectorial para tal plano es

$$(x,y,z) = (1,2,3) + t(1,-1,-1) + s(-1,2,1).$$

Para una ecuación cartesiana tome como una normal a $n = v \times w = (1,0,1)$, obteniendo la ecuación $x + z = 4$.

Perímetros, áreas, ángulos interiores de triángulos.

Dados tres puntos no colineales P, Q, R en $\mathcal{E}_3$, tales puntos forman los vértices de un triángulo (ver figura 2).



Se tiene entonces

- $\langle RPQ$ es el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ (o entre $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{RP}$), por lo que

$$cos\angle RPQ = \frac{\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PR}}{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\overrightarrow{PR}\|}$$

- El perímetro del triángulo es

$$\|\overrightarrow{PQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{RQ}\|.$$

- El área del triángulo es

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{PQ}\|h) &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{PQ}\|\|\|\overrightarrow{PR}\|Sen\langle RPQ) \\ &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right\|.\end{aligned}$$

Nota: Para puntos en el plano, usamos el hecho que $\mathbb{R}^2$ es isomorfo al subespacio (de $\mathbb{R}^3$) $S = \{(x, y, 0)|x, y \in \mathbb{R}\}$, por lo que podemos identificar cada vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $(x, y, 0) \in S \subseteq \mathbb{R}^3$. Por ejemplo, si $P(1, 3), Q(3, 5)$ y $R(2, 8)$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} = (2, 2) &\equiv (2, 2, 0) \\ \overrightarrow{PR} = (1, 5) &\equiv (1, 5, 0)\end{aligned}$$

De modo que el área del triángulo con vértices en P, Q y R es

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right\| = \frac{1}{2}\|(2, 2, 0) \times (1, 5, 0)\| = \frac{1}{2}\|(0, 0, 8)\| = 4.$$

Preguntas de selección múltiple

En cada caso escoja la (única) opción correcta (N. A. es ninguna de las anteriores.)

1. Los vectores $(1, 5), (\sqrt{2}, 3), (7, 8)$
   (a). Son l.i (b) Forman una base de $\mathbb{R}^2$ •(c.) Generan a $\mathbb{R}^2$. (d.) N. A.
   Dos cualesquiera de los vectores son l.i, por lo que forman una base para $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto los tres vectores son l,d y no pueden formar una base. Ahora, como dos cualesquiera de los vectores generan a $\mathbb{R}^2$, entonces los tres también lo hacen. Así, la única opción correcta es la (c,).

4. Los puntos $P(1,1,-1), Q(2,2,-2), R(3,3,7)$, son
(a.) Colineales. (b.) Vértices de un triángulo rectángulo.
•(c.) Vértices de un triángulo obtusángulo. (d.) N.A.

Se tiene que $\overrightarrow{PQ} = (1,1,-1), \overrightarrow{PR} = (2,2,8)$. Como estos vectores no son múltiplos, no son paralelos y los tres puntos no son colineales. Ahora $\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PR} = -4 < 0$, por lo que el triángulo tiene un ángulo obtuso con vértice en P, se sigue que ningún ángulo puede ser recto. Por lo tanto la opción correcta es (c.).

6. Una ecuación vectorial para la recta que pasa por los puntos $P(1,1,3)$ y $Q(-1,1,5)$ es:
(a.) $(x,y,z) = (-1,1,5) + t(-2,2,10)$. •(b.) $(x,y,z) = (-3-t, 1, 7+t)$.
(c.) $(x,y,z) = (1-t, 1+t, 3-t)$. (d.) N.A.

Un vector paralelo a la recta es $\overrightarrow{PQ} = (-2,0,2) = 2(-1,0,1)$. Los vectores $(-2,2,10)$ y $(-1,1,-1)$ no son paralelos a la recta, por que no son múltiplos de $(-2,0,2)$, por lo que en (a.) y (c.) las ecuaciones no corresponden a la recta considerada. Por su parte, el punto $R(-3,1,7)$ es colineal con P y Q, pues $\overrightarrow{PR} = (-4,0,4)$ es múltiplo de $\overrightarrow{PQ} = (-2,0,2)$. Como $(-1,0,1)$ es paralelo a $(-2,0,2)$ y el punto R está en la recta, la opción correcta es $(b.)$.

8. Una ecuación vectorial para el plano de ecuación $x + 3y + 4z = 6$ es
•(a.) $(x,y,z) = (6-3t-4s, t, s)$. (b.) $(x,y,z) = (6-3t-4s, s, t)$.
(c.) $(x,y,z) = (t, 6-3t-4s, s)$. (d.) N.A.

El plano es el conjunto solución de la ecuación $x + 3y + 4z = 6$, despejando x se tiene que el conjunto es $S = \{(6-3t-4s, t, s) | t, s \in \mathbb{R}\}$, por lo que (a.) es una opción correcta. Las ternas en (b.) y (c.), por su parte, no satisfacen la ecuación. Así, la única opción es (a.).

9. El triángulo con vértices en $P(1,1,2), Q(2,1,3), R(-1,1,5)$ tiene
(a.) Un ángulo recto. •(b.) Todos sus ángulos agudos.
(c.) Un ángulo obtuso. (d.) N.A.

Se tienen $\overrightarrow{PQ} = (1,0,1), \overrightarrow{PR} = (-2,0,3), \overrightarrow{QR} = (-3,0,2)$, por lo que los productos puntos $\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PR} \bullet \overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{RQ}$ son todos positivos, luego los ángulos con vértices en P, Q y R son todos agudos.