UNIVERSIDAD DEL NORTE
Departamento de Matemáticas y Estadística.
Álgebra Lineal.

Resumen temas del final 2020-30

I. Norma vectorial. Ortogonalidad.

4. Norma vectorial, ortogonalidad

- Si $v \in \mathbb{R}^n$,

$$||v|| = \sqrt{v \bullet v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \tag{7}$$

- **Propiedades básicas.** Si $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\|v\| \geq 0, \qquad \|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = (0, 0, \ldots, 0)$$
$$\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$$
$$|v \bullet w| \leq \|v\|\|w\| \quad \textbf{Desigualdad de Cauchy- Schwarz}$$
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \textbf{Desigualdad triangular}$$

- **Ángulo entre vectores.** Si v, w son vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, el ángulo entre los dos es el único ángulo $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$Cos(\theta) = \frac{v \bullet w}{\|v\|\|w\|} \tag{8}$$

- Dos vectores no nulos son **perpendiculares** si y solo si el ángulo entre los dos es $\frac{\pi}{2} rad.$ (90°).
- Dos vectores cualesquiera $v, w \in \mathbb{R}^n$ son **ortogonales** si y solo si $v \bullet w = 0$.
- Si v, w son no nulos y θ es el ángulo entre los dos, entonces θ es:
  (a) Agudo, si y solo si $v \bullet w > 0$.
  (b) Recto, si y solo so $v \bullet w = 0$.
  (c) Obtuso, si y solo si $v \bullet w < 0$.
- Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$, el **complemento ortogonal** de S es el conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ que son ortogonales a todos los elementos de S. Se nota $S^\perp$ y es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

- Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ es un conjunto finito, entonces $S^\perp$ es el subespacio solución del sistema homogéneo $m \times n$ con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{c|c} v_1 & 0 \\ v_2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ v_m & 0 \end{array}\right).$$

- En particular, $\{(0,0,\ldots,0)\}^\perp = \mathbb{R}^n$. Y si $v \neq 0$, entonces $\{v\}^\perp$ tiene dimensión $n-1$. En particular, si $(a,b) \neq (0,0)$, entonces

$$\{(a,b)\}^\perp = \langle(-b,a)\rangle = \langle(b,-a)\rangle$$

es el espacio de todos los vectores ortogonales al vector (a,b).

- Si $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3)$ son vectores l.i de $\mathbb{R}^3$, entonces el complemento ortogonal del conjunto formado por tales vectores; es decir, el espacio de todos los vectores ortogonales a ambos, es generado por el **producto cruz** de v y w

$$v \times w = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

- Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es **vector unitario** si y solo si $\|v\| = 1$. Si $v \neq (0,0,\ldots,0)$, el vector

$$u_v = \left(\frac{1}{\|v\|}\right) v \tag{9}$$

es unitario y se denomina **vector unitario direccional** de v o, simplemente, **dirección** de v. Dos vectores no nulos v, w son **paralelos**, notado $v \parallel w$, si y solo si $u_w = \pm u_v$.

- Si $v, w \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, son equivalentes.

  (a) $v \parallel w$.

  (b) v y w son múltiplos escalares (no nulos) uno del otro.

  (c) El ángulo entre v y w es 0 o π $(180°)$.

II. Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1. **Segmentos dirigidos**. Para $n \in \{1,2,3\}$, $\mathcal{E}_n$ denotará al espacio geométrico $n-$dimensional. Así, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ denotan, respectivamente, la recta, el plano y el espacio tridimensional euclidianos. Existe una correspondencia biunívoca (biyección) entre el espacio geométrico $\mathcal{E}_n$ y el espacio algebraico $\mathbb{R}^n$, la cual se consigue mediante la introducción de un sistema de coordenadas $n-$ dimensional.

   (a) Un segmento dirigido en $\mathcal{E}_n$ es un par ordenado de puntos (P,Q). La **magnitud** de un segmento dirigido (P,Q) es la distancia de P a Q. Si $P{=}Q$ se tiene un segmento dirigido nulo. Para un segmento dirigido (P,Q), con $P \neq Q$, la dirección está dada por los ángulos formados con las direcciones positivas de los ejes coordenados.

(b) Dos segmentos dirigidos son equivalentes si son ambos nulos o, en caso de no serlo, tiene igual magnitud y dirección. La clase de equivalencia de un segmento dirigido (P, Q) es el conjunto de todos los segmentos equivalentes a (P, Q). Se tiene el resultado:

$$(P, Q) \equiv (R, S) \Longleftrightarrow Q - P = S - R$$

donde identificamos los puntos con sus coordenadas. Así, describimos todo elemento de la clase por medio de un vector $Q - P$ en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Cada elemento de la clase es un representante de la misma El representante o representación regular es el representante con punto inicial en el origen. La magnitud y la dirección de los elementos de la clase (representantes de la clase) corresponden a la **norma** y a la dirección (vector unitario) del vector que describe la clase.

(c) Para todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ se tiene $v = \|v\|u_v$, donde u_v es el vector unitario direccional (dirección) de v y $\|v\| = \sqrt{v \bullet v}$.

(d) Si v, w son vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$, el ángulo entre ellos es el único ángulo $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$cos\theta = \frac{v \bullet w}{\|v\|\|w\|} \tag{10}$$

Para $n = 2, 3$ es el menor ángulo que forman las representaciones regulares de v y w.

2. **Paralelismo y ortogonalidad.**.

(a) Si $v, w \in \mathbb{R}^n - \{O\}$, $n = 2, 3$, entonces

$$\begin{aligned} v \parallel w &\Longleftrightarrow u_w = \pm u_v && (11)\\ &\Longleftrightarrow w = \alpha v, \alpha \neq 0 && (12)\\ &\Longleftrightarrow \text{El ángulo entre los dos es } 0 \text{ o } \pi && (13)\\ v \perp w &\Longleftrightarrow \text{El ángulo entre los dos es } \frac{\pi}{2} && (14)\\ &\Longleftrightarrow v \bullet w = 0 && (15) \end{aligned}$$

(b) **Colinealidad**:
Tres puntos distintos $P, Q, R \in \mathcal{E}_n$ son colineales $\Longleftrightarrow \overrightarrow{PR} = \alpha\overrightarrow{PQ}$

3. **Ecuaciones vectoriales de rectas:** Dados un punto P y un vector v, paralelo a la recta (un vector no nulo tal que todo representante anclado en un punto de la recta queda contenido en la misma) una ecuación vectorial para la recta es

$$S = P + tv, t \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

donde S es un punto variable ((x, y) o (x, y, z), según el espacio geométrico).

4. Las coordenadas de los puntos que dividen a un segmento dado $\overline{PQ}$ en n partes iguales ($n \geq 2$) vienen dadas por (ver figura 1)

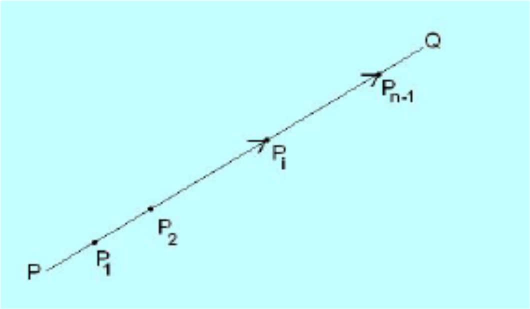


Figure 1: Coordenadas de P_i.

$$P_i = P + \frac{i}{n}\overrightarrow{PQ}, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{17}$$

5. **Ecuaciones de planos.**
Ecuación vectorial: Si P es un punto del plano y v, w son un par de generadores del plano (dos vectores no nulos y no paralelos entre sí, pero paralelos al plano) una ecuación vectorial para el plano es

$$S = P + tv + sw, t, s \in \mathbb{R} \tag{18}$$

Ecuación cartesiana: Si $n = (a, b, c)$ es una normal al plano indicado (un vector no nulo ortogonal a todo vector paralelo al plano), una ecuación para el plano es

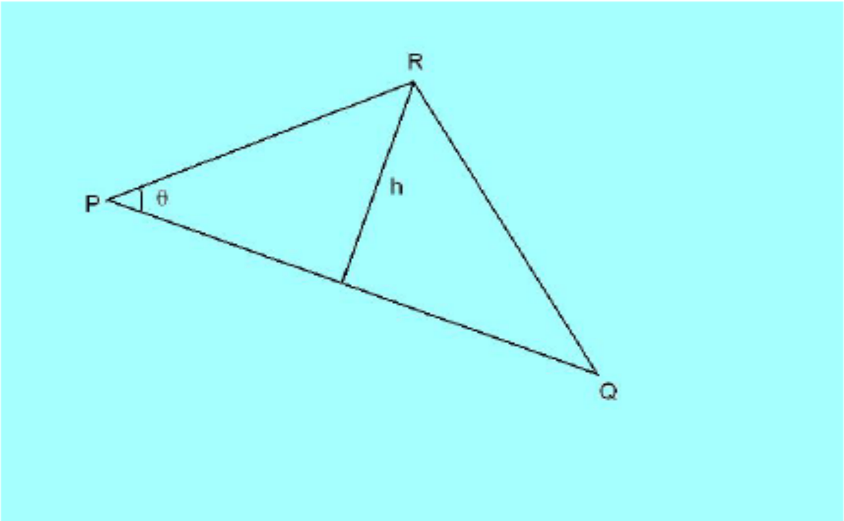
$$n \bullet S = n \bullet P \tag{19}$$

Si $P(x_o, y_0, z_0)$ y $ax_0 + by_0 + cz_0 = n \bullet P = d$ la ecuación (19) se convierte en

$$ax + by + cz = d \tag{20}$$

Si v y w son generadores del plano, entonces toda normal al plano es de la forma $\alpha(v \times w)$, con $\alpha \neq 0$.

7. **Áreas, perímetros, ángulos interiores de un triángulo.**
Si P, Q y R son puntos no colineales en $\mathcal{E}_n$ entonces son los vértices de un triángulo. En la figura 5 se tiene



- θ es el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ (o entre $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{RP}$) por lo que

$$cos\ \theta = \frac{\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PR}}{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\overrightarrow{PR}\|}.$$

- El perímetro del triángulo es $\|\overrightarrow{PQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{QR}\|$.
- Para el área, a, del triángulo, tenemos varias opciones, en la primera de ellas h, la altura, es la distancia de R a la recta que pasa por P y Q:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\|\overrightarrow{PQ}\|h}{2} \\ &= \frac{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\overrightarrow{PR}\|Sen\ \theta}{2} \\ &= \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|}{2} \end{aligned}$$

En la última opción, si los puntos están en el plano $(\mathcal{E}_2)$, se puede identificar el plano con el subespacio $\{(x, y, 0)|x, y \in \mathbb{R}\} \preceq \mathbb{R}^3$