VI Olimpiada de Matemáticas Uninorte

Fase III

Problemas grupales

7 de Noviembre de 2014

Duración: 90 minutos

1. Determine el número de enteros positivos menores que 25 que no pueden ser escritos como la diferencia de dos cuadrados perfectos.

2. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una progresión aritmética, y sea $b_1, b_2, b_3, \ldots$ una progresión geométrica. En la progresión $c_1, c_2, c_3, \ldots$ cada término es la suma de los términos correspondientes de las dos anteriores progresiones, es decir, para cada entero positivo n, $c_n = a_n + b_n$. Si $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 15$, y $c_4 = 2$, determine c_5.

3. La suma de tres números es 20. El primero es de 4 veces la suma de los otros dos. El segundo es siete veces el tercero. Determine el producto de los tres números.

4. Se tiene una lista de números enteros positivos en orden ascendente. Cada número en esa lista cumple que cuando es duplicado, el número resultante tiene un dígito más. ¿Cuál es el 2015-avo número en esa lista?

5. En un triángulo ABC, C es un ángulo recto y el punto$M$ está sobre el segmento AC. Un círculo de radio r con centro en M, es tangente a AB, y es tangente a BC en C. Si $AC = 5$ y $BC = 12$, determine el valor de r.

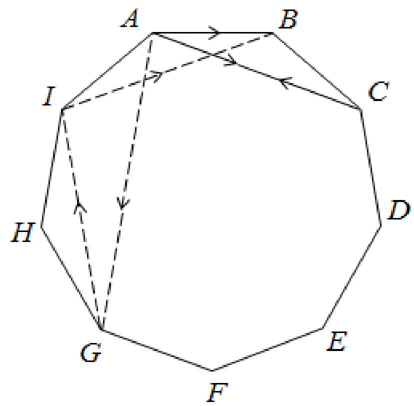
6. Algunos estudiantes en una clase de gimnasia usan camisas azules, y el resto usan camisas rojas. Hay exactamente 25 formas de elegir un equipo de tres jugadores que tenga al menos un jugador con una camisa de cada color. Determine el número de estudiantes en la clase.

7. Un cuadrado con una longitud de lado entero se corta en 10 cuadrados mas pequeños. Los cuadrados resultantes tienen lados enteros y al menos 8 de ellos tienen área igual a 1. Determine el menor valor posible de la longitud del lado del cuadrado original.

8. Una elipse que se encuentra en el primer cuadrante del plano cartesiano es tangente a los ejes x y y. Un foco de la elipse se encuentra en la coordenada $(3,7)$ y el otro en la coordenada $(d,7)$. Determine el valor de d.

9. Determine el menor entero positivo n tal que n^n tiene al menos 1.000.000 de divisores.

10. Sea $ABCDEFGHI$ un nonágono regular. Un *viaje* se define como cualquier secuencia de 4 letras tal que dos letras consecutivas no son iguales. $AGIB$ y $ACAB$ son viajes mientras que $AACB$ no lo es. Determine el número de viajes distintos desde A hasta B.

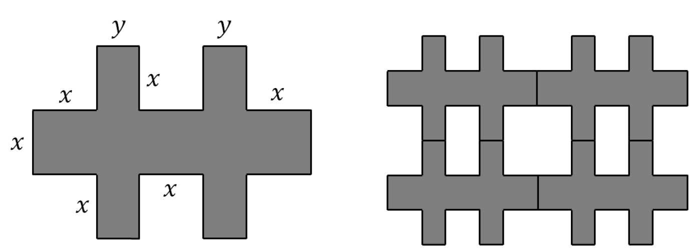


11. Tomamos un rectángulo $ABCD$ de papel, el lado AB mide 5 cm y el lado BC mide 9 cm. Le hacemos tres pliegues:

    - Llevamos el lado AB sobre el lado BC y denominamos P al punto del lado BC que coincide con A. Se forma entonces un trapecio rectángulo $BCDQ$.
    - Doblamos de manera que B y Q coincidan. Se forma un polígono de 5 lados $RPCDQ$.
    - Doblamos de nuevo haciendo coincidir D con C y Q con P. Se forma un nuevo trapecio rectángulo $RPCS$.

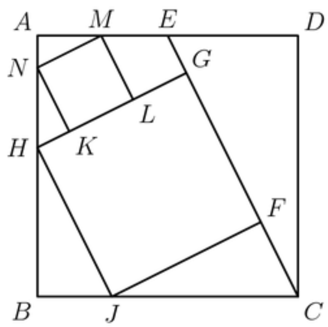
    Luego de estos pliegues, hacemos un corte perpendicular a SC por su punto medio T y queda el trapecio rectángulo $RUTS$. Determine el área en centímetros cuadrados de la figura que aparece al desplegar el último trapecio $RUTS$.

12. Sea S la forma de la figura (a) que se muestra. Un infinito número de copias de S es ubicado de tal forma que un piso infinito es cubierto como se muestra en la figura (b). Las longitudes de los lados de la figura S son números enteros x y y. Determine el menor valor de x si el 35% del área total es cubierta por la forma S.



(a) (b)

13. En el siguiente diagrama, $ABCD$ es un cuadrado. El punto E es el punto medio del segmento $\overline{AD}$. Puntos F y G encuentran en el segmento $\overline{CE}$ y H y J encuentran en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, por lo que $FGHJ$ es un cuadrado. Puntos K y L se encuentran en $\overline{GH}$ y M y N se encuentran en $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, por lo que $KLMN$ es un cuadrado. El área del cuadrado $KLMN$ es 99. Determine el área de $FGHJ$.



14. Un palíndromo es un entero positivo, que no termina en 0, que se lee igual hacia delante y hacia atrás. Por ejemplo, 35253, 171, 44 y 2 son todos palíndromos, pero 17 y 1210 no lo son. Calcule el menor número entero positivo mayor que 2015 que no puede ser escrito como la suma de dos palíndromos.

15. Sea $k = 2015^2 + 2^{2015}$. Determine el dígito de las unidades de $k^2 + 2^k$.