Función suma de divisores

De Wikipedia, la enciclopedia libre

En teoría de números, la **función suma de divisores** es una función que es una suma sobre la función divisor. Se utiliza con frecuencia en el estudio del comportamiento asintótico de la función zeta de Riemann. Varios de los estudios sobre el comportamiento de la función divisor son a veces llamados **problemas del divisor**.

Índice

Definición

La función suma de divisores es definida como

$$D(x) = \sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{\substack{j,k \\ jk \leq x}} 1$$

donde

$$d(n) = \sigma_0(n) = \sum_{\substack{j,k \\ jk = n}} 1$$

es la función divisor. La función divisor cuenta el número de manera que un número entero n puede ser escrito como producto de dos enteros. Más generalmente, se puede definir

$$D_k(x) = \sum_{n \leq x} d_k(n) = \sum_{mn \leq x} d_{k-1}(n)$$

donde $d_k(n)$ cuenta el número de maneras que un número entero n puede ser escrito como producto de k números.

Problema del divisor de Dirichlet

Encontrar una forma cerrada para esta expresión en forma de suma parece no estar al alcance de las técnicas disponibles, pero si es posible dar aproximaciones. El comportamiento principal de la serie no es difícil de obtener. Dirichlet demostró que

$$D(x) = x\log x + x(2\gamma - 1) + \Delta(x)$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni, y el término no principal como

$$\Delta(x) = \mathcal{O}\left(\sqrt{x}\right).$$

donde, $\mathcal{O}$ denota la notación de Landau. El **problema del divisor de Dirichlet**, lo que precisamente expresa, es encontrar el ínfimo de todos los valores θ para los cuales

$$\Delta(x) = \mathcal{O}\left(x^{\theta+\epsilon}\right)$$

se cumple, para todo $\epsilon > 0$. A fecha de 2011, el problema sigue sin resolver, los progresos son muy lentos. Varios de los métodos funcionan igual para este problema y para el problema del círculo de Gauss. La sección F1 de *Unsolved Problems in Number Theory* [1] inspecciona qué es y no es conocido sobre estos problemas.

- En 1904, Georgi Voronói demostró que el término error puede ser mejorado a $\mathcal{O}(x^{1/3}\log x)$.[2]
- En 1916, G.H. Hardy mostró que $\inf\theta \geq 1/4$. En particular, él demostró que para alguna constante K, existen valores de *x* para los cuales $\Delta(x) > Kx^{1/4}$ y valores de *x* para los cuales $\Delta(x) < -Kx^{1/4}$.[3]
- En 1922, J. van der Corput mejoró el límite de Dirichlet a $\inf\theta \leq 33/100$.[2]
- En 1928, J. van der Corput demostró que $\inf\theta \leq 27/82$.[2]
- En 1950, Chih Tsung-tao e independientemente en 1953 H. E. Richert demostraron que $\inf\theta \leq 15/46$.[2]
- En 1969, Grigori Kolesnik demostró que $\inf\theta \leq 12/37$.[2]
- En 1973, Grigori Kolesnik demostró que $\inf\theta \leq 346/1067$.[2]
- En 1982, Grigori Kolesnik demostró que $\inf\theta \leq 35/108$.[2]
- En 1988, H. Iwaniec and C. J. Mozzochi demostraron que $\inf\theta \leq 7/22$.[4]
- En 2003, M.N. Huxley perfeccionó el método para mostrar que $\inf\theta \leq 131/416$.[5]

Así que, el verdadero valor de $\inf\theta$ se encontrará en algún sitio entre 1/4 y 131/416; es ampliamente conjeturado que sea exactamente 1/4. La evaluación directa de $\Delta(x)$ da crédito a esta conjetura, puesto que $\Delta(x)/x^{1/4}$ parece estar aproximadamente distribuida normalmente con desviación estándar de 1 para los *x* hasta al menos 10^{16}.

Notas

1. Guy, Richard K. (2004). *Unsolved Problems in Number Theory* (3rd edición). Berlin: Springer. ISBN 9780387208602.
2. Ivic, Aleksandar (2003). *The Riemann Zeta-Function*. Nueva York: Dover Publications. ISBN 0486428133.

3. Montgomery, Hugh; R. C. Vaughan (2007). *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 9780521849036.
4. Iwaniec, H.; C. J. Mozzochi (1988). «On the divisor and circle problems». *Journal of Number Theory* **29**: 60–93. doi:10.1016/0022-314X(88)90093-5 (http://dx.doi.org/10.1016%2F0022-314X%2888%2990093-5).
5. Huxley, M. N. (2003). «Exponential sums and lattice points III». *Proc. London Math. Soc.* **87**: 591–609. doi:10.1112/S0024611503014485 (http://dx.doi.org/10.1112%2FS0024611503014485).

Referencias

- H.M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, (1974) Dover Publications, ISBN 0-486-41740-9
- E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann Zeta-Function*, (1951) Oxford at the Clarendon Press, Oxford. *(Véase capítulo 12 para una discusión del problema generalizado del divisor)*
- Apostol, Tom M. (1976), *Introduction to analytic number theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, New York-Heidelberg: Springer-Verlag, MR 0434929 (http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0434929), ISBN 978-0-387-90163-3 *(Proporciona una exposición introductoria del problema del Divisor de Dirichlet.)*
- H. E. Rose. *A Course in Number Theory.*, Oxford, 1988.
- M.N. Huxley (2003) 'Exponential Sums and Lattice Points III', *Proc. London Math. Soc.* (3)87: 591-609

Obtenido de «https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Función_suma_de_divisores&oldid=81182776»

Categoría: Funciones aritméticas

- Esta página fue modificada por última vez el 4 abr 2015 a las 00:24.
- El texto está disponible bajo la Licencia Creative Commons Atribución Compartir Igual 3.0; podrían ser aplicables cláusulas adicionales. Léanse los términos de uso para más información.
  Wikipedia® es una marca registrada de la Fundación Wikimedia, Inc., una organización sin ánimo de lucro.