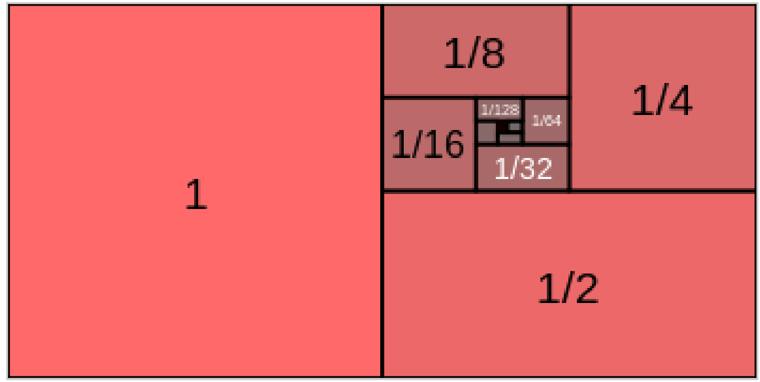
Progresión geométrica

De Wikipedia, la enciclopedia libre

Una **progresión geométrica** es una secuencia en la que el elemento se obtiene multiplicando el elemento anterior por una constante denominada *razón* o *factor* de la progresión. Se suele reservar el término *progresión* cuando la secuencia tiene una cantidad finita de términos mientras que se usa *sucesión* cuando hay una cantidad infinita de términos



Serie geométrica 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + … converge a 2.

Así, $5, 15, 45, 135, 405, ...$ es una progresión geométrica con razón igual a 3, porque cada elemento es el triple del anterior. Se puede obtener el valor de un elemento arbitrario de la secuencia mediante la expresión del término general, siendo a_n el término en cuestión, a_1 el primer término y r, la razón:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

En el ejemplo anterior, el cuarto elemento de la serie es:

$$a_4 = 5 \cdot 3^{4-1} = 5 \cdot 3^3 = 135$$

Para obtener la razón en una progresión geométrica lo más sencillo es dividir un término cualquiera entre el término anterior, sin embargo existen ocasiones donde no tenemos términos consecutivos, en ese caso utilizamos la siguiente fórmula:

$$r = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$$

Índice

Ejemplos de progresiones geométricas

- La progresión **1, 2 ,4 ,8 ,16,** es una progresión geométrica cuya razón vale 2, al igual que **5, 10, 20, 40**.
- La razón no necesariamente tiene que ser un número entero. Así, **12, 3, 0.75, 0.1875** es una progresión geométrica con razón 1/4.
- La razón tampoco tiene por qué ser positiva. De este modo la progresión **3, -6, 12, -24** tiene razón -2. Este tipo de progresiones es un ejemplo de **progresión alternante** porque los signos alternan entre positivo y negativo.
- Cuando la razón es igual a 1 se obtiene una progresión constante: **7, 7, 7, 7**
- Un caso especial es cuando la razón es igual a cero, por ejemplo: **4, 0, 0, 0**. Existen ciertos autores que no consideran este caso como progresión y piden explícitamente que $r \neq 0$ en la definición.

Suma de términos de una progresión geométrica

Suma de los primeros *n* términos de una progresión geométrica

Se denomina como S_n a la suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión geométrica:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

Si se quiere obtener una fórmula para calcular de una manera rápida dicha suma, se multiplica ambos miembros de la igualdad por la razón de la progresión r.

$$r \cdot S_n = r \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n)$$
$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + ... + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$$

puesto que $r \cdot a_i = a_{i+1}$

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1}$$

Si se procede a restar de esta igualdad la primera:

$$r \cdot S_n - S_n = a_{n+1} - a_1$$

ya que todos los términos intermedios se cancelan mutuamente.

Despejando S_n

$$S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1} = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

De esta manera se obtiene la suma de los *n* términos de una progresión geométrica cuando se conoce el primer y el último término de la misma. Si se quiere simplificar la fórmula, se puede expresar el término general de la progresión a_n como

$$S_n = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1} = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r-1}$$

que expresa la suma de *n* términos consecutivos de una progresión geométrica en función del primer término y de la razón de la progresión.

Se puede generalizar el procedimiento anterior para obtener la suma de los términos consecutivos comprendidos entre dos elementos arbitrarios $a_m \ y \ a_n$ (ambos inclusive):

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \frac{r \cdot a_n - a_m}{r-1} = a_1 \cdot \frac{\left(r^{n+1} - r^m\right)}{r-1} = a_m \cdot \frac{\left(r^{n-m+1} - 1\right)}{r-1}$$

Suma de infinitos términos de una progresión geométrica

Si el valor absoluto de la razón es menor que la unidad $|r| < 1$, la suma de los infinitos términos decrecientes de la progresión geométrica converge hacia un valor finito. En efecto, si $|r| < 1$, r^∞ tiende hacia 0, de modo que:

$$S_\infty = a_1 \frac{r^\infty - 1}{r-1} = a_1 \frac{0-1}{r-1}$$

Finalmente, la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón inferior a la unidad es:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

Producto de los primeros "n" términos de una progresión geométrica

El producto de los n primeros términos de una progresión geométrica se puede obtener mediante la fórmula

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\sqrt{a_1 \cdot a_n}\right)^n$$ (si $a_1, r > 0$).

Dado que los logaritmos de los términos de una progresión geométrica de razón r (si $a_1, r > 0$), están en progresión aritmética de diferencia $\log$ r, se tiene:

$$log(\prod_{i=1}^{n} a_i) = \sum_{i=1}^{n} loga_i = \frac{(loga_1 + loga_n)n}{2} = log\left(\sqrt{a_1 \cdot a_n}\right)^n$$, y tomando antilogaritmos se obtiene la fórmula.

Véase también

- Progresión aritmética.
- Serie geométrica.

Enlaces externos

- Weisstein, Eric W. «Progresión geométrica» (http://mathworld.wolfram.com/GeometricSeries.html). En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.

Obtenido de «https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Progresión_geométrica&oldid=86015728»

Categoría: Sucesiones
