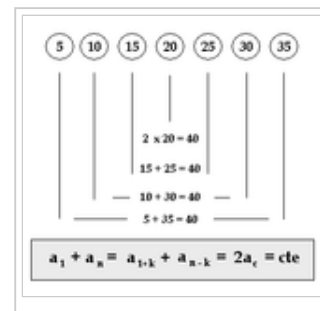


Progresión aritmética

De Wikipedia, la enciclopedia libre

En matemáticas, una **progresión aritmética** es una sucesión de números tales que la diferencia de dos términos sucesivos cualesquiera de la secuencia es una constante, cantidad llamada «diferencia de la progresión», «diferencia» o incluso «distancia».

Por ejemplo, la sucesión matemática: 3, 5, 7, 9... es una progresión aritmética de cuadro constante 2. Así como: 5 ; 2 ; -1 ; -4 es una progresión aritmética de constante «-3».



Índice

- 1 Término general de una progresión aritmética
- 2 Interpolación de términos restantes
- 3 Suma de términos de una progresión aritmética
 - 3.1 Suma de los dos términos extremos, y suma de los términos equidistantes de aquéllos
 - 3.2 El término central de una progresión aritmética
 - 3.3 Suma de todos los términos de una progresión aritmética
- 4 Progresión aritmética de segundo grado
 - 4.1 Definición
- 5 Citas y referencias
- 6 Véase también
- 7 Referencias
- 8 Enlaces externos

Término general de una progresión aritmética

El término general de una progresión aritmética es aquel en el que se obtiene cualquier término restándole la diferencia al término siguiente. El término de una progresión aritmética es la expresión que nos da cualquiera de sus *términos*, conocidos alguno de ellos y la *diferencia* de la progresión. La **fórmula del término general** de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Donde *d* es un número real llamado diferencia. Si el término inicial de una progresión aritmética es *a* y la diferencia común es *d*, entonces el término *n*-ésimo de la sucesión viene dada por

$$a + nd, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ si el término inicial se toma como el cero.}$$

$a + (n - 1)d$ $n = 1, 2, 3, \dots$ si el término inicial se toma como el primero.

La primera opción ofrece una fórmula más sencilla, ya que es común en el lenguaje el uso de "cero" como ordinal. Generalizando, sea la progresión aritmética:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots, a_n$ de diferencia d

tenemos que:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d \\ &\dots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + d \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned}$$

sumando miembro a miembro todas esas igualdades, y simplificando términos semejantes, obtenemos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \tag{I}$$

expresión del término general de la progresión, conocidos su primer término y la diferencia. Pero también podemos escribir el término general de otra forma. Para ello consideremos los términos a_m y a_n ($m < n$) de la progresión anterior y pongámoslos en función de a_1 :

$$\begin{aligned} a_m &= a_1 + (m - 1)d \\ a_n &= a_1 + (n - 1)d \end{aligned}$$

Restando ambas igualdades, y trasponiendo, obtenemos:

$$a_n = a_m + (n - m)d \tag{II}$$

expresión más general que (I) pues nos da los términos de la progresión conociendo uno cualquiera de ellos, y la diferencia.

Dependiendo de que la diferencia d de una progresión aritmética sea positiva, nula o negativa, tendremos:

$d > 0$: progresión creciente. Cada término es mayor que el anterior.

- Ejemplo: 3, 6, 9, 12, 15, 18... ($d = 3$)

$d = 0$: progresión constante. Todos los términos son iguales.

- Ejemplo: 2, 2, 2, 2, 2... ($d = 0$)

$d < 0$: progresión decreciente. Cada término es menor que el anterior.

- Ejemplo: 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7... ($d = -2$)

Interpolación de términos restantes

Interpolación de k términos diferenciales entre dos números a y b dados, es formar una progresión aritmética de $k + 2$ términos, siendo a el primero y b el último. El problema consiste en encontrar la diferencia d de la progresión.

Apliquemos (II), $a_n = a_m + (n - m)d$, teniendo en cuenta que $a = a_m$, $b = a_n$, $n = k + 2$ y $m = 1$:

$$b = a + (k + 2 - 1)d$$

$$b = a + (k + 1)d$$

de dónde, si despejamos d :

$$d = \frac{b - a}{k + 1} \tag{III}$$

Por ejemplo, queremos interpolar 3 términos diferenciales entre 2 y 14. Calculamos la diferencia de la progresión según (III) haciendo $a = 2$, $b = 14$, $k = 3$

$$d = \frac{14 - 2}{3 + 1}$$

$$d = 3$$

Los términos a interpolar serán $a_2 = 5$, $a_3 = 8$, y $a_4 = 11$.

Ahora ya tenemos la progresión aritmética pedida:

$$2, 5, 8, 11, 14$$

Suma de términos de una progresión aritmética

Consideraremos en primer lugar algunas propiedades de la suma de términos de una progresión aritmética. En particular nos fijaremos en la suma de los dos términos extremos, el primero y el último, así como en la suma de aquellos cuyos lugares sean equidistantes de los extremos de la progresión. Seguidamente estudiaremos el **término central** de una progresión aritmética con un número impar de términos. Finalmente se generalizará a todos los términos de la progresión.

Suma de los dos términos extremos, y suma de los términos equidistantes de aquéllos

Sea la progresión aritmética de diferencia d :

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

Sumemos el primer y último términos:

$$a_1 + a_n = a_1 + (a_1 + (n - 1)d)$$

$$a_1 + a_n = 2a_1 + (n - 1)d \quad (\text{IV})$$

Veamos ahora la suma de dos **términos equidistantes de los extremos**. Éstos serán de la forma a_{1+k} y a_{n-k} , siempre que $(n - k) > 0$.

Aplicando (I)

$$a_{1+k} = a_1 + kd$$

$$a_{n-k} = a_1 + (n - k - 1)d$$

Sumamos y obtenemos:

$$a_{1+k} + a_{n-k} = 2a_1 + (n - 1)d$$

el mismo resultado que el obtenido para $a_1 + a_n$.

Concluimos por tanto que la suma del primer y último términos de una progresión aritmética es igual a la suma de dos términos equidistantes de los extremos:

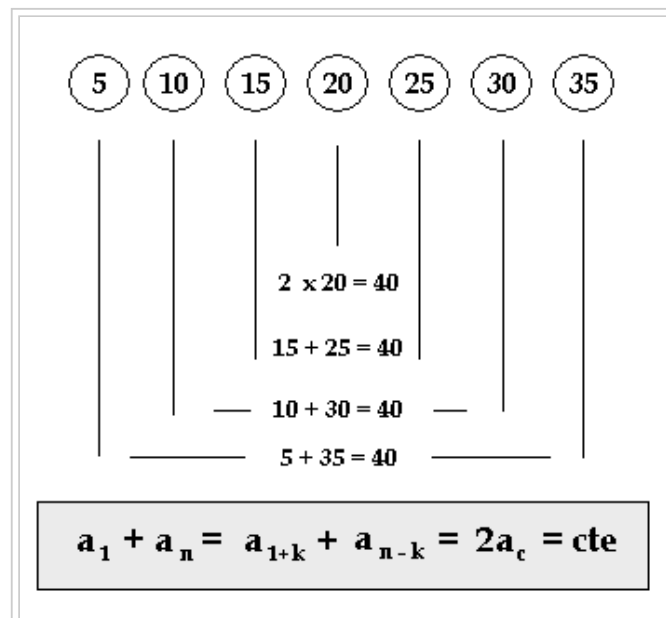
$$a_1 + a_n = a_{1+k} + a_{n-k}$$

El término central de una progresión aritmética

En una progresión aritmética con un número impar de términos, **término central** a_c es aquél que por el lugar que ocupa en la progresión equidista de los extremos a_1 y a_n de ésta.

Sea la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, \dots, a_c, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ de diferencia d , y término central a_c . De acuerdo con la expresión del término general en (I)

$$a_c = a_1 + (c - 1)d$$



Arriba se han escrito los siete primeros términos de la progresión aritmética de término general $a_n = 5n$. Se comprueba que la suma de los términos primero y último es igual a la suma de dos términos equidistantes a éstos, e igual al doble del término central. Esta importante propiedad va a permitir determinar la suma de todos los términos de una progresión aritmética, por grande que ésta sea.

pero para el término central

$$c = \frac{n + 1}{2}$$

sustituimos este valor de c y resolvemos:

$$a_c = a_1 + \frac{n - 1}{2}d \tag{V}$$

y comparando con (IV) es evidente que:

$$a_1 + a_n = 2a_c$$

Resumiendo, hemos demostrado que:

$$a_1 + a_n = a_{1+k} + a_{n-k} = 2a_c = cte \tag{VI}$$

Esta propiedad nos va a permitir calcular la suma de todos los términos de una progresión aritmética.

Se considera una subprogresión que empieza en el término de orden m hasta el de orden n , hay un número impar de términos. Luego la media aritmética de los términos de la subprogresión es igual a su término central.

Por ejemplo, la progresión cuyos términos son los impares de 1 en adelante. Tómese la subprogresión 7,9,11,13,15. La media aritmética es $(7+9+11+13+15)/5 = 11 =$ término central.¹

Suma de todos los términos de una progresión aritmética

La suma de los términos en un segmento inicial de una sucesión aritmética se conoce a veces como serie aritmética. Existe una fórmula para las series aritméticas. La suma de los n primeros valores de una sucesión finita viene dada por la fórmula:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

donde a_1 es el primer término y a_n el último. Demostremoslo.

Sea una progresión aritmética de término general a_n y de diferencia d :

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_c + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

aplicando la propiedad conmutativa de la suma:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_c + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades anteriores, y aplicando la propiedad asociativa de la suma:

$$2 \sum_{i=1}^n a_i = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + 2a_c + \cdots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

pero según IV, y según VI sabemos que todas las sumas indicadas entre paréntesis tienen el mismo valor que $a_1 + a_n$, de manera que:

$$2 \sum_{i=1}^n a_i = n(a_1 + a_n)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = n \frac{a_1 + a_n}{2} \tag{VII}$$

ya tenemos la suma de todos los términos de una progresión aritmética conociendo sus términos extremos, y el número total de aquéllos. La utilidad de **(VII)** se comprende mejor cuando nos las vemos con un número muy grande de términos en una progresión. Por ejemplo, ¿cuánto suman los cien mil primeros múltiplos positivos de 5? El resultado es inmediato:

$$a_1 = 5$$

$$a_n = 500.000$$

$$n = 100.000$$

$$S_n = 100.000 \frac{5 + 500.000}{2}$$

$$S_n = 2,500025 \cdot 10^{10}$$

más de veinticinco mil millones, y lo hemos calculado en cinco segundos.

Así también, para hallar la suma de los n primeros enteros positivos:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

lo que también se conoce como número triangular.

Una historia muy conocida es la del descubrimiento de esta fórmula por Carl Friedrich Gauss cuando su profesor de tercero de primaria pidió a sus alumnos hallar la suma de los 100 primeros números y calculó el resultado de inmediato: 5050.

Esto se puede explicar más detalladamente:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$ (por la propiedad conmutativa de la suma, se pueden expresar los sumandos en este orden)

$S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$ (hay $n/2$ sumandos al sumar los términos anteriores, el n con el 1, el $n-1$ con el 2, etc)

$$S = (n/2)(n+1)$$

$$S = n(n+1)/2$$

En el caso del problema de Gauss, n vale 100 y $S = 100 \cdot 101/2 = 5050$.

Progresión aritmética de segundo grado

Considerando la sucesión 1,3,6,10,15,21,...

la sucesión de la diferencia de términos consecutivos es 2,3,4,5,6. Se llama denota como D , señala las *primeras diferencias*.

la sucesión de las primeras diferencias es 1,1,1,1, que se ha estabilizado.

Definición

Cuando la diferencias de las primeras diferencias se estabilizan, la sucesión dada se llama *progresión de segundo grado*²

Citas y referencias

1. González- Mancill: Álgebra elemental moderna
2. Sadosky: Cálculo numérico y gráfico

Véase también

- Progresión geométrica

Referencias

- Weisstein, Eric W. «Arithmetic progression» (<http://mathworld.wolfram.com/ArithmeticProgression.html>). En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.

Enlaces externos

Ejercicios con progresiones aritméticas (<http://www.ematematicas.net/sucesiones.php?a=&tipo=parit>)

Obtenido de «https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Progresi3n_aritm3tica&oldid=85515382»

Categoría: Sucesiones

-
- Esta página fue modificada por última vez el 1 oct 2015 a las 23:37.
 - El texto está disponible bajo la Licencia Creative Commons Atribución Compartir Igual 3.0; podrían ser aplicables cláusulas adicionales. Léanse los términos de uso para más información. Wikipedia® es una marca registrada de la Fundación Wikimedia, Inc., una organización sin ánimo de lucro.