

IV Olimpiada de Matemáticas Uninorte

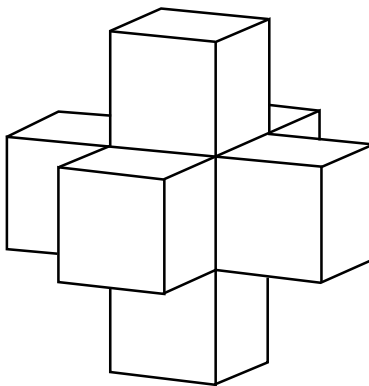
Fase I

25 de Octubre de 2013

1. Un frasco contiene gomas de cinco colores diferentes: el 30% son azules, el 20% son cafés, el 15% son rojas, el 10% son amarillas, y las otras 30 gomas son verdes. Si la mitad de las gomas azules son reemplazadas por gomas cafés, ¿cuántas gomas serán cafés?

(A) 40 (B) 39 (C) 30 (D) 42 (E) 50

2. Una pieza es creada juntando 7 cubos de lado 1, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la razón del volumen del cubo en unidades cúbicas entre el área del cuadrado en unidades cuadradas?



(A) 1 : 6 (B) 7 : 36 (C) 1 : 5 (D) 7 : 30 (E) 6 : 25

3. El profesor piensa un número natural y les dice a los alumnos:

- a) El número, o termina en 5 o es divisible por 7
- b) O es mayor que 20, o termina en 9
- c) O es múltiplo de 12 o es menor que 21

¿Qué número ha pensado el profesor?

(A) 12 (B) 25 (C) 49 (D) 60 (E) 84

4. ¿Cuántos enteros positivos n satisfacen la siguiente condición:

$$(130n)^{50} > n^{100} > 2^{200}?$$

(A) 11 (B) 120 (C) 30 (D) 125 (E) 65

5. Hay exactamente dos valores de a para los cuales la ecuación $4x^2 + ax + 8x + 9 = 0$ tiene exactamente una solución para x . ¿Cuál es la suma de estos valores?

- (A) -16 (B) -8 (C) 0 (D) 8 (E) 20

6. ¿Cuales son los dos últimos dígitos de la suma

$$7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2013}?$$

- (A) 00 (B) 07 (C) 56 (D) 99 (E) 17

7. Elisa participa en una competición de pesca. Gana 2 pesos por cada pez que pesque, si pesa más de 1.5 kg; pero ha de pagar 1 peso por cada pez que pesque, si pesa menos de 1.5 kg. Ha pescado 12 peces y su ganancia ha sido 3 pesos. ¿Cuántos peces pesaban más de 1.5 kg?

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

8. En un mercado de trueque, los animales se cambian de acuerdo con la lista de conversión mostrada a la derecha. ¿Cuál es el menor número de gallinas que debe llevar una persona al mercado, si quiere volver con un ganso, un pavo y un gallo?

| |
|---------------------------------|
| 1 pavo = 5 gallos |
| 1 ganso + 2 gallinas = 3 gallos |
| 4 gallinas = 1 ganso |

- (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

9. En una carrera con 100 corredores, no hubo dos que llegaran al mismo tiempo y, al ser preguntados en qué lugar llegaron, respondieron con números que variaban de 1 a 100. Pero la suma de los números dados en esas respuestas fue 4000. ¿Cuál es el menor número posible de corredores que mintieron al ser preguntados?

- (A) 12 (B) 13 (C) 11 (D) 10 (E) 9

10. Durante las vacaciones de Agosto llovió en total 7 veces, pero unicamente o en la mañana o en la tarde. Si llovió una mañana no llovió en la tarde. No hubo lluvia exactamente en 5 mañanas y en 6 tardes. ¿Cuántos días duraron las vacaciones?

- (A) 10 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

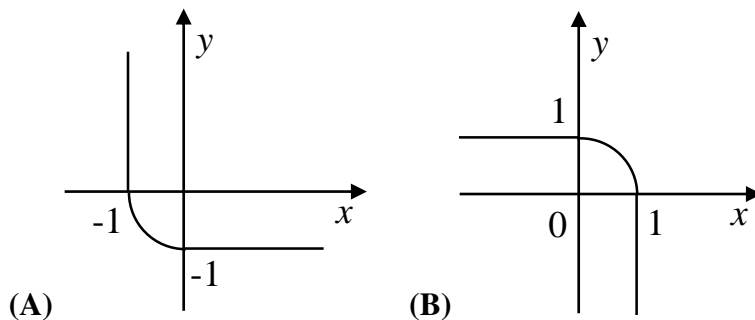
11. La ecuación cuadrática $x^2 + mx + n = 0$ tiene raíces que son el doble de las raíces de la ecuación $x^2 + px + m = 0$, y ninguno de los m , n , y p es cero. ¿Cuál es el valor de $\frac{n}{p}$?

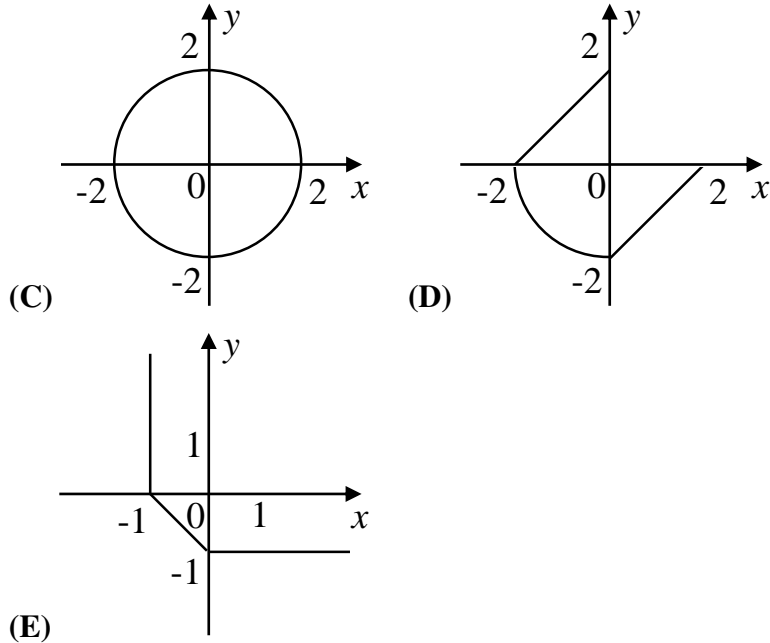
- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16

12. Suponga que $4^a = 5$, $5^b = 6$, $6^c = 7$, y $7^d = 8$. ¿Cuál es el valor de $a \cdot b \cdot c \cdot d$?
- (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{5}{2}$ (E) 3
13. En una fiesta hay 13 parejas. Cada hombre saludó a todas las personas excepto a su pareja. Las mujeres no se saludaron entre sí. ¿Cuántos saludos hubo en total?
- (A) 350 (B) 234 (C) 169 (D) 325 (E) 120
14. ¿Cuántos números enteros de tres cifras son tales que la cifra del medio es la media aritmética de las otras dos?
- (A) 9 (B) 16 (C) 12 (D) 45 (E) 25
15. Si escribimos siete números enteros consecutivos, y la suma de los tres menores es 33, ¿cuál será la suma de los tres mayores?
- (A) 39 (B) 37 (C) 42 (D) 48 (E) 45
16. Se construye un tabla cuadrada 3×3 de números reales tal que la suma de los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal (completa) es la misma. Dos de los números se muestran en la figura ¿Qué número debe estar en la posición a ?

| | | |
|-----|----|----|
| a | | |
| | | 47 |
| | 63 | |

- (A) 16 (B) 51 (C) 54 (D) 55 (E) 110
17. ¿Cuál de los gráficos siguientes representa el conjunto de las soluciones de la ecuación $(x-|x|)^2 + (y-|y|)^2 = 4$?





18. En una fiesta hay 13 parejas. Cada hombre saludó a todas las personas excepto a su pareja. Las mujeres no se saludaron entre sí. ¿Cuántos saludos hubo en total?
 (A) 350 (B) 234 (C) 169 (D) 325 (E) 120
19. Un cuadrado de lado 1 y un círculo de radio $\sqrt{3}/3$ comparten el mismo centro. ¿Cuál es el área dentro del círculo, pero fuera del cuadrado?
 (A) $\frac{\pi}{3} - 1$ (B) $\frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\pi}{18}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{2\pi}{9}$
20. Dos corredores, A y B, corren alrededor de la pista de un estadio. Cada uno de ellos lo hace a velocidad constante. A corre más rápido que B y tarda 3 minutos en dar una vuelta al estadio. Si A y B empiezan a la vez, 8 minutos después A dobla a B por primera vez. ¿Cuánto tarda B en dar una vuelta al estadio?
 (A) 6 min (B) 8 min (C) 4min 30 seg (D) 4 min 48 seg
 (E) 4 min 20 seg
21. Sea Z el número de números de 8 cifras, todas ellas distintas y ninguna de las cuales es 0. ¿Cuántos números de 8 cifras distintas, ninguna de las cuales es 0, son divisibles por 9?
 (A) $\frac{Z}{8}$ (B) $\frac{Z}{3}$ (C) $\frac{Z}{9}$ (D) $\frac{8Z}{9}$ (E) $\frac{7Z}{8}$
22. Una parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es reflejada sobre el eje x . La parábola y su reflexión son trasladadas horizontalmente 5 unidades en direcciones opuestas

para convertirse en las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$, respectivamente. ¿Cuál de las siguientes opciones describe correctamente la gráfica de $y = (f + g)(x)$?

- (A) una parábola tangente al eje x
 (B) una parábola no tangente al eje x (C) una línea horizontal
 (D) una línea no horizontal (E) la gráfica de una función cúbica

23. La sucesión de funciones numéricas $f_1(x), f_2(x), \dots$ satisface las siguientes condiciones: *i*) $f_1(x) = x$ y *ii*) $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1 - f_n(x)}$. ¿Cuál es el valor de $f_{2013}(2013)$?

- (A) 2013 (B) $\frac{2012}{2013}$ (C) $-\frac{1}{2012}$ (D) -2013 (E) $\frac{2013}{2012}$

24. Una compañía aérea no cobra por el equipaje si su peso es inferior a un cierto valor (en kg). Por cada kg extra se cobra una tarifa. El equipaje del matrimonio A pesa 60 kg y pagan 3 pesos. El equipaje del Sr. B pesa lo mismo, pero él paga 10.50 pesos. ¿Cuál es el peso máximo del equipaje que un pasajero puede llevar sin pagar?

- (A) 10 kg (B) 18 kg (C) 20 kg (D) 25 kg (E) 39 kg

25. Si $\sin(x) + \cos(x) = m$ entonces $\sin^4(x) + \cos^4(x)$ es igual a

- (A) $1 - \frac{(1 - m^2)^2}{2}$ (B) $1 + \frac{(1 - m^2)^2}{2}$ (C) $\frac{1 - (1 - m^2)^2}{2}$
 (D) m^4 (E) $m^4 + 1$

26. Sea S el conjunto de triplas ordenadas (x, y, z) de números reales tales que

$$\log_{10}(x + y) = z \quad \text{y} \quad \log_{10}(x^2 + y^2) = 10^{z+1}$$

Existen números reales a y b tales que para toda tripla ordenada (x, y, z) en S se tiene que $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z}$. ¿Cuál es el valor de $a + b$?

- (A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{29}{2}$ (C) 15 (D) $\frac{39}{2}$ (E) 24

27. Existen enteros positivos A, B y C , con máximo común divisor igual a 1, tales que

$$A \log_{200} 5 + B \log_{200} 2 = C.$$

¿Cuál es el valor de $A + B + C$?

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

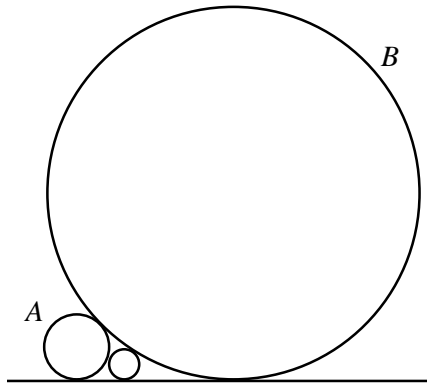
28. Juan lanza un dado octahédrico marcado con los números del 1 al 8. Luego, Ana lanza un dado común con las caras marcadas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los dos números en los dados sea múltiplo de 3?

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{7}{12}$ (E) $\frac{2}{3}$

29. Sea $\triangle XYZ$ un triángulo rectángulo con $m\angle XOY = 90^\circ$. Sea M y N los puntos medios de los lados OX y OY , respectivamente. Si $XN = 19$ y $YM = 22$, encuentre XY .

- (A) 24 (B) 26 (C) 28 (D) 30 (E) 32

30. Un círculo centrado en A con radio 1 y un círculo centrado en B con radio 4 son externamente tangentes. Un tercer círculo es tangente a A y a B y a una de las tangentes externas comunes como se muestra en la figura. El radio del tercer círculo es



- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{4}{9}$ (E) $\frac{1}{2}$