Solución P1EDO2022-10A

1) Se usa la sustitución $y = ux$, $dy = x\,du + u\,dx$ para resolver la ED $(2xy + 3y^2)\,dx - 3xy\,dy = 0$:

$$(2x(ux) + 3(ux)^2)\,dx - 3x(ux)(x\,du + u\,dx) = 0$$

$$(2x^2u + 3x^2u^2)\,dx - 3x^2u(x\,du + u\,dx) = 0$$

$$x^2(2u + 3u^2)\,dx - 3x^2u(x\,du + u\,dx) = 0$$

$$\overset{\div x^2}{\Longrightarrow} \quad (2u + 3u^2)\,dx - 3u(x\,du + u\,dx) = 0$$

$$(2u + \cancel{3u^2} - \cancel{3u^2})\,dx - 3ux\,du = 0$$

$$2u\,dx - 3ux\,du = 0$$

$$3ux\,du = 2u\,dx$$

$$\int 3\,du = \int 2\frac{dx}{x} \longrightarrow 3u = 2\,Ln(x) + C$$

$$\xrightarrow{u = y/x} \quad 3\frac{y}{x} = 2(Ln(x)) + C$$

Ahora se usa la condición inicial $y(1) = 3$.

Cuando $x = 1$, $y = 3$:

$$3 \cdot \frac{3}{1} = 2\underbrace{Ln(1)}_{=0} + C \quad \Rightarrow C = 9.$$

Por tanto la solución del problema de valor inicial es

$$\boxed{3\frac{y}{x} = 2Ln(x) + 9.}$$

2) Primero escribimos la ecuación de Bernoulli

$$2x\frac{dy}{dx} - 3y = 4x^3y^3 \qquad (*_1)$$

en su forma estándar. Para ello se divide por $2x$:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{2}\frac{1}{x}y = 2x^2y^3 \qquad (\Rightarrow n = 3) \qquad (*_2)$$

Sea $u = y^{1-3} = y^{-2}$. Es decir, sea $\boxed{u = y^{-2}, \quad \frac{du}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}}$ $(*_3)$

Multiplicando la ED en $(*_2)$ por $-2y^{-3}$, resulta:

$$-2y^{-3}\frac{dy}{dx} + 3\frac{1}{x}y^{-2} = -4x^2.$$

Usando la sustitución $(*_3)$:

$$\frac{du}{dx} + 3\frac{1}{x}u = -4x^2 \qquad (*_4) \text{ ED lineal de orden 1.}$$

$$\mu = e^{\int 3\frac{1}{x}dx} = e^{3\ln(x)} = e^{\ln(x^3)} = x^3 \leftarrow \text{factor integrante para } (*_4).$$

$$(*_4)\cdot x^3 \Rightarrow \frac{d}{dx}[x^3u] = x^3\cdot(-4x^2)$$

$$\Rightarrow x^3u = -4\int x^5 dx + c = -4\frac{x^6}{6} + c$$

$$\Rightarrow u = -\frac{2}{3}x^3 + cx^{-3}$$

$$\Rightarrow y^{-2} = cx^{-3} - \frac{2}{3}x^3$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \sqrt{\frac{1}{cx^{-3} - \frac{2}{3}x^3}}}$$

3) Dada la ecuación diferencial (ED)

$$6xy\,dx+(4y+9x^2)\,dy=0,\quad y>0, \qquad (*_1)$$

a) Veamos que no es exacta.

$M=6xy \Rightarrow M_y=6x$

$N=4y+9x^2 \Rightarrow N_x=18x$

$M_y\neq N_x \Rightarrow$ ED es no exacta.

b) Factor Integrante:

$$\frac{N_x-M_y}{M}=\frac{18x-6x}{6xy}=\frac{12\cancel{x}}{6\cancel{x}y}=\frac{2}{y}.$$

$$\Rightarrow \mu=e^{\int \frac{2}{y}dy}=e^{2\ln(y)}=e^{\ln(y^2)}=y^2$$

$\Rightarrow \mu=y^2$ es un factor integrante para la ED.

Multiplicando la ED por este factor, resulta:

$$\underbrace{6xy^3}_{\overline{M}}dx+\underbrace{(4y^3+9x^2y^2)}_{=\overline{N}}dy=0. \qquad (*_2)$$

$\overline{M}_y=18xy^2=\overline{N}_x \Rightarrow$ La ED $(*_2)$ es exacta.

c) Buscamos $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\overline{M}=6xy^3, \quad (1) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\overline{N}=4y^3+9x^2y^2 \quad (2)$$

• Integrando (1) respecto a x: $f(x,y)=6y^3\int x\,dx+g(y)=6y^3\frac{x^2}{2}+g(y)$

$\Rightarrow f(x,y)=3x^2y^3+g(y), \quad (3)$

• Derivando (3) respecto a y: $\dfrac{\partial f}{\partial y}=9x^2y^2+g'(y) \quad (4)$

• Igualando (2) y (4): $\cancel{9x^2y^2}+g'(y)=4y^3+\cancel{9x^2y^2}$

$\Rightarrow g'(y)=4y^3 \Rightarrow g(y)=\int 4y^3dy=4\frac{y^4}{4}+c_1=y^4+c_1$

$\Rightarrow g(y)=y^4 \quad (5)$ (la constante c_1 se omite porque es absorbida al final por otra constante arbitraria)

• Sustituyendo (5) en (3): $f(x,y)=3x^2y^3+y^4$

• Solución general: $f(x,y)=c$, es decir $\boxed{3x^2y^3+y^4=c_1}$