Solución de P2 EDO2022-30, Fila A

1. Capacidad del tanque = 700 gal.

$V_0 = 300$ gal. $A_0 = 70$ libras de sal. $C_e = 3$ lib/gal.

$r_e = 10$ gal/min. $r_s = 8$ gal/min.

a) $V(t) = V_0 + (r_e - r_s)t$ Volumen de solución en el tanque en el instante t

$= 300 + (10-8)t$

$\Rightarrow V(t) = 300 + 2t.$

b) $t = ?$ para que $V(t) = 700.$

$\Rightarrow 300 + 2t = 700 \Rightarrow 2t = 400 \Rightarrow t = 200$ min.

c) $\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = r_e C_e - r_s \dfrac{A(t)}{V(t)} \\ A(0) = A_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = 30 - 8\dfrac{A}{300+2t}, \\ A(0) = 70. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dA}{dt} + \dfrac{8}{300+2t} A = 30, \\ A(0) = 70. \end{cases}$

d) Como $\dfrac{8}{300+2t} = \dfrac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}(150+t)} = \dfrac{4}{150+t} = \dfrac{4}{t+150}$, la ED que modela el problema sí se puede escribir como

$$\frac{dA}{dt} + \frac{4}{t+150} A = 30.$$

2. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{d^2y}{dx^2} - 6y' = 0$ en $I = (-\infty, \infty)$; $y_1 = 2$, $y_2 = e^{-2x}$, $y_3 = e^{3x}$.

- $y_1 = 2$, $y_1' = 0$, $y_1'' = 0$, $\dfrac{d^3y_1}{dx^3} = y_1''' = 0.$

$\Rightarrow \dfrac{d^3y_1}{dx^3} - \dfrac{d^2y_1}{dx^2} - 6y_1' = 0 - 0 - 6(0) = 0$ para todo $x \in I$.

$\Rightarrow y_1$ es una solución para la ED en I.

- $y_2 = e^{-2x}$, $y_2' = -2e^{-2x}$, $y_2'' = 4e^{-2x}$, $\dfrac{d^3y_2}{dx^3} = y_2''' = -8e^{-2x}.$

$\Rightarrow \dfrac{d^3y_2}{dx^3} - \dfrac{d^2y_2}{dx^2} - 6y_2' = -8e^{-2x} - 4e^{-2x} - 6(-2e^{-2x})$

$= -8e^{-2x} - 4e^{-2x} + 12e^{-2x}$

$= -12e^{-2x} + 12e^{-2x}$

$= 0$, para todo $x \in I$.

$\Rightarrow y_2$ es también solución de la ED en I.

- $y_3 = e^{3x}$, $y_3' = 3e^{3x}$, $y_3'' = 9e^{3x}$, $\frac{d^3y_3}{dx^3} = y_3''' = 27e^{3x}$.

$$\Rightarrow \frac{d^3y_3}{dx^3} - \frac{d^2y_3}{dx^2} - 6y_3' = 27e^{3x} - 9e^{3x} - 6(3e^{3x})$$
$$= 27e^{3x} - 9e^{3x} - 18e^{3x}$$
$$= 27e^{3x} - 27e^{3x}$$
$$= 0 \text{ para todo } x \in I.$$

$\Rightarrow y_3$ también es una solución de la ED en I.

Independencia lineal:

$$W = \begin{vmatrix} \boxed{2} & e^{-2x} & e^{3x} \\ 0 & -2e^{-2x} & 3e^{3x} \\ 0 & 4e^{-2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2e^{-2x} & 3e^{3x} \\ 4e^{-2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2\left[(-2e^{-2x})(9e^{3x}) - (4e^{-2x})(3e^{3x})\right]$$
$$= 2[-18e^{x} - 12e^{x}]$$
$$= 2[-30e^{x}] = -60e^{x}.$$

Como $W = -60e^{x} \neq 0$ para todo $x \in I = (-\infty, \infty)$, entonces y_1, y_2, y_3 son soluciones de la ED linealmente independientes en I.

$\Rightarrow y_1, y_2, y_3$ forman un conjunto fundamental de soluciones (CFS) para la ED en el intervalo I.

3) $(x^2+9)^2y'' - 2x(x^2+9)y' + 2(x^2+9)y = 3(x^2+9)$.

La ecuación homogénea asociada es

$$(x^2+9)^2y'' - 2x(x^2+9)y' + 2(x^2+9)y = 0. \quad (*)$$

a) Veamos que $y_1(x) = x$ es solución de $(*)$ en $I = (-\infty, \infty)$.

$y_1' = 1$, $y_1'' = 0$, entonces

$$(x^2+9)^2y_1'' - 2x(x^2+9)y_1' + 2(x^2+9)y_1$$

$$= (x^2+9)^2 \cdot 0 - 2x(x^2+9)\cdot 1 + 2(x^2+9)x$$

$$= 0 - 2x\cancel{(x^2+9)} + 2x\cancel{(x^2+9)} = 0 \quad \text{para todo } x \in I.$$

$\Rightarrow y_1$ es solución de $(*)$ en I.

b) $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{[y_1]^2} dx$ fórmula de reducción de orden.

Para determinar $P(x)$, escribimos primero $(*)$ en su forma estandar. Para ello dividimos $(*)$ por $(x^2+9)^2$:

$$y'' - \frac{2x}{x^2+9}y' + \frac{2}{x^2+9}y = 0. \quad \Rightarrow P(x) = -\frac{2x}{x^2+9}$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int \frac{2x}{x^2+9}dx}}{x^2} = y_1 \int \frac{e^{\int \frac{du}{u}}}{x^2} dx \quad \leftarrow u = x^2+9,\ du = 2x\,dx$$

$$= y_1 \int \frac{e^{\ln(u)}\,dx}{dx} = x \int \frac{u\,dx}{x^2}$$

$u = x^2+9$

$$= x \int \frac{x^2+9}{x^2} dx$$

$$= x \int \left(1 + \frac{9}{x^2}\right) dx = x\left(x + 9\left(-x^{-1} + \cancel{c}^{\,0}\right)\right)$$

$$= x^2 - 9.$$

$\Rightarrow y_2 = x^2 - 9$ es otra solución de $(*)$ que es l.i. con y_1 en I.

c) La solución general de $(*)$ es

$$\underline{y = c_1 x + c_2(x^2 - 9)},$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.