Departamento de Matemáticas y Estadística
Taller de preparación para el Parcial II
Cálculo III (ANEC)

REGLA DE LA CADENA

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca parte de la temática del segundo corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. El documento está basado en ejercicios de los textos [1], [2], [3] y [4]. Para problemas similares a los que aquí están planteados puede revisar los parciales aplicados en semestres anteriores, ver página web de la materia:

`https://www.uninorte.edu.co/web/departamento-de-matematicas-y-estadistica/calculo-3-anec`

---

1. Usando la regla de la cadena, encuentre las derivadas indicadas de las funciones dadas.

   a) $f(x,y) = x + (y-2)^3$; $\quad x = r + 5t$; $\quad y = 3r - 4t$; $\quad \frac{\partial f}{\partial t}$.
   b) $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + z^2$; $\quad x = 4uv^2$; $\quad y = 5u^2 + 10v^2$; $\quad z = u^3$; $\quad \frac{\partial f}{\partial u}$; $\quad \frac{\partial f}{\partial v}$.
   c) $u = 3x - 4y^2$; $\quad x = 5pq$; $\quad y = 3p^2 - 2q$; $\quad \frac{\partial u}{\partial p}$; $\quad \frac{\partial u}{\partial q}$.
   d) $u = 3x^2 + xy - 2y^2 + 3x - y$; $\quad x = 2r - 3s$; $\quad y = r + s$; $\quad \frac{\partial u}{\partial r}$; $\quad \frac{\partial u}{\partial s}$.
   e) $u = xy + xz + yz$; $\quad x = rs$; $\quad y = r^2 - s^2$; $\quad z = (r-s)^2$; $\quad \frac{\partial u}{\partial r}$; $\quad \frac{\partial u}{\partial s}$.
   f) $u = x^2yz$; $\quad x = \frac{r}{s}$; $\quad y = re^s$; $\quad z = re^{-s}$; $\quad \frac{\partial u}{\partial r}$; $\quad \frac{\partial u}{\partial s}$.
   g) $z = x^2 + xy - y^3$; $\quad x = r^2 - 5s$; $\quad y = s^3$; $\quad \frac{\partial z}{\partial r}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial s}$.
   h) $f(x,y) = \sqrt{x + y^2}$; $\quad x = t^2 + t$; $\quad y = t - 200$; $\quad \frac{df}{dt}$.
   i) $w = e^{xyz}$; $\quad x = r + 5t$; $\quad y = 2t^3$; $\quad z = 1 - 3r^2$; $\quad \frac{\partial w}{\partial t}$; $\quad \frac{\partial w}{\partial r}$.
   j) $y = e^{2x^2}$; $\quad x = r - 3t^2$; $\quad \frac{\partial y}{\partial r}$; $\quad \frac{\partial y}{\partial t}$.
   k) $w = xy - yz - x^2yz$; $\quad x = t - 1$; $\quad y = 2t^3$; $\quad z = t^2 + 1$; $\quad \frac{dw}{dt}$.
   l) $w = e^{x+y+z}$; $\quad x = r + t$; $\quad y = u - 2t$; $\quad z = u - 2r^2$; $\quad \frac{\partial w}{\partial u}$; $\quad \frac{\partial w}{\partial r}$; $\quad \frac{\partial w}{\partial t}$.
   m) $z = (x^2 + xy^2)^3$; $\quad x = r + s + t$; $\quad y = 2r - 3s + 8t$; $\quad \frac{\partial z}{\partial t}$.
   n) $w = x^2 + xyz + y^3z^2$; $\quad x = r - s^2$; $\quad y = rs$; $\quad z = 2r - 5s$; $\quad \frac{\partial w}{\partial s}$.
   ñ) $w = x^2z^2 + xyz + yz^2$; $\quad x = 5t$; $\quad y = 2t + 3$; $\quad z = 6 - t$; $\quad \frac{dw}{dt}$.

---

2. Use regla de la cadena para calcular la derivada parcial dada en el punto indicado en cada caso:

   a) $w = xy + yz + xz$; $\quad x = u + v$; $\quad y = u - v$; $\quad z = uv$; $\quad \frac{\partial w}{\partial v}$; $\quad u = 1/2,\ v = 1$.
   b) $z = \frac{x}{y}$; $\quad x = re^{st}$; $\quad y = rse^t$; $\quad \frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$; $\quad r = 1,\ s = 2,\ t = 0$.
   c) $z = (x^2 + y^2)e^{x+y}$; $\quad x = (r-s)^2$; $\quad y = (r+s)^2$; $\quad \frac{\partial z}{\partial s}$; $\quad r = 1,\ s = 1$.
   d) $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$; $\quad x = r^2 - 5s$; $\quad y = 2t^3$; $\quad \frac{\partial z}{\partial r}$; $\quad r = 3,\ s = 5,\ t = 2$.
   e) $y = x^2(2x - 3)$; $\quad x = t^2 - 2trs$; $\quad \frac{\partial y}{\partial t}$; $\quad r = 0,\ s = 1,\ t = -2$.
   f) $z = (4x + 3y)^3$; $\quad x = r^2s$; $\quad y = r - 2s$; $\quad \frac{\partial z}{\partial r}$; $\quad r = 0,\ s = 1$.

g) $y = \frac{x}{x-5}$; $\quad x = 2t^2 - 3rs - r^2 t$; $\quad \frac{\partial y}{\partial t}$; $\quad r = 0,\ s = 2,\ t = 1.$

h) $u = \frac{p-q}{q-r}$; $\quad p = x + y + z$; $\quad q = x - y + z$; $\quad r = x + y - z$; $\quad \frac{\partial u}{\partial x}$; $\quad x = \sqrt{3},\ y = 2,\ z = 1.$

---

3. La derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ de la función $z = x^2 + xy^3$, con $x = uv^2 + w^3$ y $y = u + ve^w$ cuando $u = 2,\ v = 1$ y $w = 0$ es:

   ◯ 54 ◯ 178 ◯ 85 ◯ NA

---

4. La derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ de la función $z = x^2 + xy^3$, con $x = uv^2 + w^3$ y $y = u + ve^w$ cuando $u = 2,\ v = 1$ y $w = 0$ es:

   ◯ 54 ◯ 178 ◯ 85 ◯ NA

---

5. Si $z = x^2 + xy + y^2$, donde $x = (r+t)^2$ y $y = (rt)^2$, entonces $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ cuando $r = 1$ y $t = -1$ es:

   ◯ 4 ◯ 1 ◯ 0 ◯ -4

---

6. Una compañía determina que el costo $C(x,y)$ de producir x unidades de un producto A, y y unidades de un producto B está dado por

$$C(x,y) = (3x^2 + 4y + 2)^{1/2},$$

donde las funciones de demanda están dadas por

$$\begin{aligned} x &= 2r + 4s - 15, \\ y &= r - 3s + 8, \end{aligned}$$

siendo r y s los precios de A y B, respectivamente. Use la **regla de cadena** para determinar el costo marginal con respecto al precio de B cuando $r = 2$ y $s = 3$.

---

7. Suponga que el costo C de producir q_A unidades de un producto A, y q_B unidades de un producto B está dado por

$$C = (q_A^3 + 3q_B^2 + 4)^{1/3}$$

y que las funciones de demanda para los productos están dadas por

$$\begin{aligned} q_A &= 20 - 11p_A + p_B, \\ q_B &= 10 + p_A^2 - p_B, \end{aligned}$$

siendo q_A y q_B los precios de A y B, respectivamente. Use la **regla de cadena** para determinar el costo marginal con respecto al precio de A y B cuando $p_A = 4$ y $p_B = 25$.

---

8. La función de costos conjuntos de dos productos viene dada por

$$C = 0,02(q_A + q_B)^3 - 0,1(q_A + q_B)^2 + 3(q_A + q_B) + 300$$

y las funciones de demandas son

$$\begin{aligned} q_A &= 125 - p_A^2 - 0,1p_B^2, \\ q_B &= 130 - 0,1p_A^2 - 2p_B^2. \end{aligned}$$

Use la **regla de cadena** para calcular $\frac{\partial C}{\partial p_A}$. Evaluar dicha derivada cuando $p_A = 2$ y $p_B = 3$.

---

9. La ecuación de demanda de un producto depende del precio, p_1, de este producto y del precio, p_2, de otro producto a través de la relación

$$q_1 = 30\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt[3]{p_1^2}} \qquad \text{miles de artículos.}$$

Se piensa aumentar los precios de estos dos productos en los próximos meses. El precio de cada artículo dentro de t meses estará dado por: $p_1 = 120 + 0,4t + 0,02t^2$ y $p_2 = 90 + 0,1t + 0,03t^2$. Determine el ritmo de crecimiento de la demanda dentro de un año.

Referencias

[1] E. F. Haeussler, R. S. Paul, and R. J. Wood. *Matemáticas para administración y economía.* Pearson, décimo tercera edición, 2015.

[2] R. Larson and B. H. Edwards. *Cálculo 2 de varias variables.* McGraw-Hill, novena edición, 2010.

[3] L. Leithold. *El Cálculo.* Oxford University Press - Harla México, S. A., séptima edición, 1998.

[4] G. B. Thomas. *Cálculo Varias Variables.* Pearson, décimosegunda edición, 2010.