

Departamento de Matemáticas y Estadística
Ecuaciones Diferenciales

Taller 2

13 de septiembre de 2022

1. Resolver los siguientes ejercicios del texto guía. Allí se indica primero la Sección y después de los dos puntos los ejercicios sugeridos:
 - a) 3.1: 21-28.
 - b) 4.1: 9-11, 15-34.
 - c) 4.2: 1-22.
 - d) 4.3: 1-36.
2. Una tanque de 120 galones contiene inicialmente 90 libras de sal disueltas en 90 galones de agua. Salmuera que contiene 2 lib/gal de sal fluye al tanque a una razón de 4 gal/min, y bien mezclada sale del tanque a una razón de 3 gal/min. ¿Cuánta sal hay en el tanque cuando éste está lleno?
Resp/ $240 - \frac{90^4}{120^3} \approx 202$ libras.
3. Un tanque contiene inicialmente 300 galones de agua en los que se han disuelto 50 libras de sal. Otra solución salina que tiene $c_e(t) = 2 + \sin(t/4)$ $\frac{\text{lib}}{\text{gal}}$ entra al tanque a una velocidad de 3 gal/min y sale a razón 2 gal/min. Halle la ecuación que expresa la cantidad de sal que hay en el tiempo t , $x(t)$.
4. Un tanque contiene 500 galones de una solución de agua salada que contiene 0.05 libras de sal por galón de agua. Agua pura es vertida en el tanque y drena en el fondo del tanque de modo que el volumen permanece constante. ¿A qué razón \mathbf{R} gal/min debería ser vertida el agua el tanque para tener una concentración de sal \mathbf{C} de 0.01 lib/gal en una hora?
Resp/ $\mathbf{R} = \frac{25}{3} \ln 5$.
5. Suponga que el Lago Erie tiene volumen de 480 km^3 . La razón de entrada del Lago Huron al Lago Erie es de 350 km^3 por año. La razón de salida del Lago Erie al lago Ontario es la misma. En el tiempo ($t = 0$ en años), la concentración del contaminante del Lago Erie-causado por el paso de contaminantes industriales es cinco veces la del lago Huron. Si el flujo de salida está perfectamente mezclado en el agua del lago, ¿cuánto tiempo tomará en reducir la concentración de contaminantes en el Lago Erie a dos veces la del Lago Huron?
Resp/ $t = \frac{480}{350} \ln 4$ años.

6. Un tanque está lleno de 100 litros de agua en los que se han disuelto 20 kilogramos de sal. Otra mezcla que contiene 1 kilogramo de sal por litro es bombeada al tanque a razón de 7 litros por minuto. La solución mezclada es bombeada hacia el exterior a razón de 8 litros por minuto.

- ¿Cuál es el volumen después de 20 minutos?
- ¿Cuál es el tiempo de vaciado del tanque?
- Determine la función que da la cantidad de sal en cada instante.
- ¿Cuánta cantidad de sal hay en el tanque después de 20 minutos? ¿Cuál es la concentración en este instante?

Resp/ a) 80 litros, b) t=100 litros, c) $x(t) = 100 - t - 80(1 - \frac{t}{100})^8$.

7. En los siguientes problemas determine si las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo I que se indica. Forme la solución general de la ecuación diferencial.

- $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y_1 = \cos(\ln x)$, $y_2 = \sin(\ln x)$, $I = (0, \infty)$.
- $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = x^{-2}$, $y_3 = x^{-2} \ln x$, $I = (0, \infty)$.
- $-6x^3y''' - 7x^2y'' - xy' + y = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = x^{1/2}$, $y_3 = x^{1/3}$, $I = (0, \infty)$.
- $y^{(4)} + y'' = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \sin x$, $I = (-\infty, \infty)$.

8. En los siguientes ejercicios la función dada $y_1(x)$ es una solución de la ecuación homogénea dada. Use al fórmula de reducción de orden para encontrar una segunda solución $y_2(x)$.

- $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0$, $y_1 = x + 1$.
- $x^2y'' - xy' - 3y = 0$, $y_1(x) = x^3$.
- $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1(x) = x$.
- $x \frac{d^2y}{dx^2} - (x + 3) \frac{dy}{dx} + 3y = 0$, $y_1(x) = e^x$.
- $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1(x) = x$.
- $(x^4 - x^2)y'' - (3x^3 - x)y' + 8y = 0$, $y_1(x) = x^4$.
- $(x^4 + x^2)y'' - (x^3 - x)y' - 4y = 0$, $y_1(x) = x^2$.
- $y'' - (2 \tan x)y' + 3y = 0$, $y_1(x) = \sin x$.
- $(x^2 + 1)^2y'' - 4x(x^2 + 1)y' + 6(x^2 - 2)y = 0$, $y_1(x) = x^2 + 1$.

9. En cada caso encuentre la solución general de la ED y resuelva el PVI. Allí k representa una constante real positiva.

- $y'' + 4y' + 5y = 0$ con $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
- $2y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$.
- $y'' - 5y' - 14y = 0$, $y(0) = 2$ y $y'(0) = 1$.
- $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(1) = e^5$ y $y'(0) = 2$.
- $3y'' - 7y' - 6y = 0$, $y(0) = 2$ y $y'(0) = 1/3$.

$$f) 4y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 2 \text{ y } y'(0) = 1/2.$$

$$g) y'' + k^2y = 0, \quad y(0) = 1 \text{ y } y'(0) = 2.$$

$$h) y'' - k^2y = 0, \quad y(0) = 1 \text{ y } y'(0) = 2.$$

10. Halle la solución de

$$a) 2y''' - y'' + 18y' - 9y = 0.$$

$$b) y''' - 2y'' - 2y' - 3y = 0.$$

$$c) y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

$$d) y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0.$$

$$e) y^{(4)} - 16y = 0.$$

$$f) y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

$$g) y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y'' = 0.$$

$$h) y^{(6)} + 16y^{(4)} + 64y = 0.$$