

Nombre: _____

Grupo : _____

Fórmulas básicas

1.

$$\int \frac{dx}{mx+b} = \frac{1}{m} \ln(mx+b)$$

(a) $\int \frac{dx}{3x+4} =$

(c) $\int \frac{dx}{4+2x} =$

(b) $\int \frac{dx}{2x-5} =$

(d) $\int \frac{dx}{4-7x} =$

2. Si $k \neq 1$, entonces

$$\int (mx+b)^k dx = \frac{1}{m} \frac{(mx+b)^{k+1}}{k+1}$$

(a) $\int \frac{2}{(5x+3)^2} dx =$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx =$

(b) $\int (7x+2)^{-5} dx =$

(d) $\int (7-2x)^{-\frac{2}{3}} dx =$

Tema: Fracciones parciales

1. **Caso I. Factores lineales diferentes.**

Si el denominador puede expresarse en factores lineales distintos, entonces, a cada factor de la forma $mx+b$ le corresponde una fracción parcial de la forma $\frac{A}{mx+b}$ con A constante

Recordemos casos de factorización de polinomios cuadráticos

Diferencia de cuadrados: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$x^2 - 4 =$$

$$x^2 - 9 =$$

$$x^2 - 16 =$$

$$4x^2 - 1 =$$

$$16x^2 - 9 =$$

Factor común: $ax^2 + bx = x(ax+b)$

$$x^2 - 4x =$$

$$x^2 - 9x =$$

$$x^2 - 16x =$$

$$4x^2 - x =$$

$$16x^2 - 9x =$$

Trinomio $x^2 + bx + c =$

$$x^2 - 4x - 5 =$$

$$x^2 - 6x + 8 =$$

$$x^2 + 3x - 10 =$$

$$x^2 - 2x + 1 =$$

$$x^2 + 7x + 10 =$$

Trinomio $ax^2 + bx + c =$

$$2x^2 - x - 1 =$$

$$3x^2 - 5x - 2 =$$

$$2x^2 - 5x + 2 =$$

$$4x^2 - 13x + 3$$

$$3x^2 + 8x - 3 =$$

(a)

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx = \frac{7}{5} \ln(x+2) + \frac{8}{5} \ln(x-3) + k$$

Factorizando y aplicando el caso I, tenemos

$\frac{3x-1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$
$\rightarrow \frac{3x-1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$
$\rightarrow 3x-1 = A(x+2) + B(x-3)$

Determinemos A y B, usando el método de anuladores

$\begin{aligned} x=3 &\rightarrow 3(3)-1 = A(3+2) + B(3-3) \\ &\rightarrow 9-1 = A(5) + B(0) \\ &\rightarrow 8 = 5A \\ &\rightarrow A = \frac{8}{5} \end{aligned}$	$\begin{aligned} x=-2 &\rightarrow 3(-2)-1 = A(-2+2) + B(-2-3) \\ &\rightarrow -6-1 = A(0) + B(-5) \\ &\rightarrow -7 = -5B \\ &\rightarrow B = \frac{7}{5} \end{aligned}$
--	--

entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x-1)dx}{(x-3)(x+2)} &= \int \frac{A dx}{x-3} + \int \frac{B dx}{x+2} \\ &= \frac{8}{5} \int \frac{dx}{x-3} + \frac{7}{5} \int \frac{dx}{x+2} = \frac{8}{5} \ln(x-3) + \frac{7}{5} \ln(x+2) + C \end{aligned}$$

(b)

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x} dx = \frac{11}{5} \ln(x-5) - \frac{1}{5} \ln x + k$$

(c)

$$\int \frac{x^2+4}{x^3-x} dx = \frac{5}{2} \ln(x-1) + \frac{5}{2} \ln(x+1) - 4 \ln x + k$$

(d)

$$\int \frac{x^2 - 2x + 5}{x(x-1)(x-2)} dx = \frac{5}{2} \ln x + \frac{5}{2} \ln(x-2) - 4 \ln(x-1) + K$$

(e)

$$\int \frac{x+4}{(2x+1)(x+2)} dx = \frac{7}{6} \ln(2x+1) - \frac{2}{3} \ln(x+2) + k$$

(f) El ingreso marginal para una compañía que fabrica q radios por semanas está dado por

$$\frac{dr}{dq} = \frac{5(q+4)}{q^2 + 4q + 3}$$

con $r(q)$ ingreso en miles de dólares. Determine $r(q)$

(g) El ingreso marginal para una compañía que fabrica q radios por semanas está dado por

$$\frac{dr}{dq} = \frac{200(q+3)}{q^2 + 7q + 6}$$

con $r(q)$ ingreso en miles de dólares. Determine $r(q)$

2. Caso II. Factores lineales repetidos

Si el denominador puede expresarse como un producto de factores lineales algunos de los cuales están repetidos, entonces a cada factor de la forma $(mx+b)^k$, k natural, $k \geq 2$, le corresponde una suma de fracciones de la forma

$$\frac{A_1}{mx+b} + \frac{A_2}{(mx+b)^2} + \frac{A_3}{(mx+b)^3} + \dots + \frac{A_k}{(mx+b)^k}$$

(a) $\int \frac{2x+3}{x(x+2)^2} dx$

Aplicando el caso II, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x(x+2)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \\ \rightarrow \frac{2x+3}{x(x+2)^2} &= \frac{A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx}{x(x+2)^2} \\ \rightarrow 2x+3 &= A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx \end{aligned}$$

Podemos utilizar el método de los anuladores, pero sólo hay dos anuladores para 3 incógnitas, entonces con los anuladores determinamos dos incógnitas y luego, estos valores los reemplazamos cuando evaluemos la expresión $2x+3 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$ en cualquier otro número, despejando luego la tercera incógnita.

$$\begin{aligned} \text{Para } x = -2 \quad \rightarrow \quad 2(-2) + 3 &= A(-2+2)^2 + Bx(-2+2) + C(-2) \\ \rightarrow \quad -4 + 3 &= A(0) + B(0) - 2C \\ \rightarrow \quad -1 &= -2C \\ C &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 0 \quad \rightarrow \quad 2(0) + 3 &= A(0+2)^2 + B(0)(0+2) + C(0) \\ \rightarrow \quad 0 + 3 &= A(2)^2 + B(0) + C(0) \\ \rightarrow \quad 3 &= 4A \\ \rightarrow \quad A &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Para $x = 1$	$\rightarrow$	$2(1) + 3$	$=$	$A(1 + 2)^2 + B(1)(1 + 2) + C(1)$
	$\rightarrow$	$2 + 3$	$=$	$A(3)^2 + B(1)(3) + C(1)$
	$\rightarrow$	5	$=$	$9A + 3B + C$
		Reemplazando		
		$A = \frac{3}{4}$	y	$C = \frac{1}{2}$
	$\rightarrow$	5	$=$	$9 \cdot \frac{3}{4} + 3B + (1) \frac{1}{2}$
	$\rightarrow$	$3B$	$=$	$-5 + \frac{27}{4} + \frac{1}{2}$
	$\rightarrow$	$3B$	$=$	$\frac{9}{4}$
	$\rightarrow$	B	$=$	$\frac{9}{12}$
	$\rightarrow$	B	$=$	$\frac{3}{4}$

$$\int \frac{x+3}{x^2(x+2)} dx = -\frac{1}{4} \left(\ln x - \ln(x+2) + \frac{6}{x} \right) + K$$

(b)

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)^2} dx = 2(x+1) - \ln(x+2) + \frac{5}{x+2} + K$$

(c)

$$\int \frac{x^2+1}{(x+2)^2} dx = x - 4(x+2) \ln(x+2) - \frac{5}{x+2} + K$$