Departamento de Matemáticas y Estadísticas
Actividad de formación Integral
Cálculo II ANEC

Nombre:	**Grupo :**

Fórmulas básicas

1.
$$\int \frac{dx}{mx+b} = \frac{1}{m}\ln(mx+b)$$

(a) $\int \frac{dx}{3x+4} =$

(b) $\int \frac{dx}{2x-5} =$

(c) $\int \frac{dx}{4+2x} =$

(d) $\int \frac{dx}{4-7x} =$

2. Si $k \neq 1$, entonces
$$\int (mx+b)^k \quad dx = \frac{1}{m}\frac{(mx+b)^{k+1}}{k+1}$$

(a) $\int \frac{2}{(5x+3)^2}dx =$

(b) $\int (7x+2)^{-5} \ dx =$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx =$

(d) $\int (7-2x)^{-\frac{2}{3}} \ dx =$

Tema: Fracciones parciales

1. **Caso I. Factores lineales diferentes.**
Si el denominador puede expresarse en factores lineales distintos, entonces, a cada factor de la forma $mx+b$ le corresponde una fracción parcial de la forma $\frac{A}{mx+b}$ con A constante

Recordemos casos de factorización de polinomios cuadráticos
Diferencia de cuadrados:$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$x^2 - 4 =$$

$$x^2 - 9 =$$

$$x^2 - 16 =$$

$$4x^2 - 1 =$$

$$16x^2 - 9 =$$

Factor comun:$ax^2 + bx = x(ax+b)$

$$x^2 - 4x =$$

$$x^2 - 9x =$$

$$x^2 - 16x =$$

$$4x^2 - x =$$

$$16x^2 - 9x =$$

Trinomio $x^2 + bx + c =$

$$x^2 - 4x - 5 =$$

$$x^2 - 6x + 8 =$$

$$x^2 + 3x - 10 =$$

$$x^2 - 2x + 1 =$$

$$x^2 + 7x + 10 =$$

Trinomio $ax^2 + bx + c =$

$$2x^2 - x - 1 =$$

$$3x^2 - 5x - 2 =$$

$$2x^2 - 5x + 2 =$$

$$4x^2 - 13x + 3$$

$$3x^2 + 8x - 3 =$$

(a)

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}dx = \frac{7}{5}\ln(x+2) + \frac{8}{5}\ln(x-3) + k$$

Factorizando y aplicando el caso I, tenemos

$$\boxed{\begin{array}{rrcl} & \dfrac{3x-1}{(x-3)(x+2)} & = & \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+2} \\ \rightarrow & \dfrac{3x-1}{(x-3)(x+2)} & = & \dfrac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)} \\ \rightarrow & 3x-1 & = & A(x+2)+B(x-3) \end{array}}$$

Determinemos A y B, usando el método de anuladores

$$\boxed{\begin{array}{llrl} x=3 & \rightarrow & 3(3)-1 & = A(3+2)+B(3-3) \\ & \rightarrow & 9-1 & = A(5)+B(0) \\ & \rightarrow & 8 & = 5A \\ & \rightarrow & A & = \dfrac{8}{5} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{llrl} x=-2 & \rightarrow & 3(-2)-1 & = A(-2+2)+B(-2-3) \\ & \rightarrow & -6-1 & = A(0)+B(-5) \\ & \rightarrow & -7 & = -5B \\ & \rightarrow & B & = \dfrac{7}{5} \end{array}}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x-1)dx}{(x-3)(x+2)} &= \int \frac{Adx}{x-3} + \int \frac{Bdx}{x+2} \\ &= \frac{8}{5}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{7}{5}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{8}{5}\ln(x-3) + \frac{7}{5}\ln(x+2) + C \end{aligned}$$

(b)

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x}dx = \frac{11}{5}\ln(x-5) - \frac{1}{5}\ln x + k$$

(c)

$$\int \frac{x^2+4}{x^3-x}dx = \frac{5}{2}\ln(x-1) + \frac{5}{2}\ln(x+1) - 4\ln x + k$$

(d)
$$\int \frac{x^2-2x+5}{x\,(x-1)\,(x-2)}dx = \frac{5}{2}\ln x + \frac{5}{2}\ln{(x-2)} - 4\ln{(x-1)} + K$$

(e)
$$\int \frac{x+4}{(2x+1)(x+2)}dx = \frac{7}{6}\ln{(2x+1)} - \frac{2}{3}\ln{(x+2)} + k$$

(f) El ingreso marginal para una compañía que fabrica q radios por semanas está dado por
$$\frac{dr}{dq} = \frac{5(q+4)}{q^2+4q+3}$$
con $r(q)$ ingreso en miles de dólares. Determine $r(q)$

(g) El ingreso marginal para una compañía que fabrica q radios por semanas está dado por
$$\frac{dr}{dq} = \frac{200(q+3)}{q^2+7q+6}$$
con $r(q)$ ingreso en miles de dólares. Determine $r(q)$

2. **Caso II. Factores lineales repetidos**

Si el denominador puede expresarse como un producto de factores lineales algunos de los cuales están repertidos, entonces a cada factor de la forma $(mx+b)^k, k$ natural,$k \geq 2$, le corresponde una suma de fracciones de la forma

$$\frac{A_1}{mx+b} + \frac{A_2}{(mx+b)^2} + \frac{A_3}{(mx+b)^3} + ... + \frac{A_k}{(mx+b)^k}$$

(a) $\int \frac{2x+3 \quad dx}{x(x+2)^2}$

Aplicando el caso II, tenemos:
$$\boxed{\begin{array}{rrcl} & \dfrac{2x+3}{x(x+2)^2} & = & \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{(x+2)^2} \\ \to & \dfrac{2x+3}{x(x+2)^2} & = & \dfrac{A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx}{x(x+2)^2} \\ \to & 2x+3 & = & A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx \end{array}}$$

Podemos utilizar el método de los anuladores, pero sólo hay dos anuladores para 3 incognitas, entonces con los anuladores determinamos dos incógnitas y luego, estos valores los reemplazamos cuando evaluemos la expresión $\quad 2x+3 \quad = \quad A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx \quad$ en cualquier otro número, despejando luego la tercera incógnita.

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} \text{Para } x=-2 \quad \to & 2(-2)+3 & = & A(-2+2)^2 + Bx(-2+2) + C(-2) \\ \to & -4+3 & = & A(0) + B(0) - 2C \\ \to & -1 & = & -2C \\ & C & = & \dfrac{1}{2} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} \text{Para } x=0 \quad \to & 2(0)+3 & = & A(0+2)^2 + B(0)(0+2) + C(0) \\ \to & 0+3 & = & A(2)^2 + B(0) + C(0) \\ \to & 3 & = & 4A \\ \to & A & = & \dfrac{3}{4} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{llll}
\text{Para } x=1 & \rightarrow & 2(1)+3 & = A(1+2)^2+B(1)(1+2)+C(1) \\
& \rightarrow & 2+3 & = A(3)^2+B(1)(3)+C(1) \\
& \rightarrow & 5 & = 9A+3B+C \\
& & & \text{Reemplazando} \\
& & & A=\dfrac{3}{4} \text{ y } C=\dfrac{1}{2} \\
& \rightarrow & 5 & = 9.\dfrac{3}{4}+3B+(1)\dfrac{1}{2} \\
& \rightarrow & 3B & = -5+\dfrac{27}{4}+\dfrac{1}{2} \\
& \rightarrow & 3B & = \dfrac{9}{4} \\
& \rightarrow & B & = \dfrac{9}{12} \\
& \rightarrow & B & = \dfrac{3}{4}
\end{array}}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2(x+2)}dx = -\frac{1}{4}\left(\ln x - \ln(x+2) + \frac{6}{x}\right) + K$$

(b)

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)^2}dx = 2\,(x+1) - \ln(x+2) + \frac{5}{x+2} + K$$

(c)

$$\int \frac{x^2+1}{(x+2)^2}dx = x - 4(x+2)\ln(x+2) - \frac{5}{x+2} + K$$