MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca parte de la temática del segundo corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. El documento está basado en ejercicios de los textos [1], [2], [3], [4] y [5].

---

1. Encuentre los puntos críticos de la función dada y clasifique cada uno como máximo, mínimo o punto de silla.

   a) $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$.
   b) $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$.
   c) $f(x,y) = xy$.
   d) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy + 14y$.
   e) $f(x,y) = \dfrac{16}{x} + \dfrac{6}{y} + x^2 - 3y^2$.
   f) $f(x,y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$.
   g) $f(x,y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$.
   h) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^3 - 3y^2 - 9y + 5$.
   i) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$.
   j) $f(x,y) = -x^4 - 32x + y^3 - 12y + 7$.
   k) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$.
   l) $f(x,y) = (x-4)\ln(xy)$.
   m) $f(x,y) = x^3 - 4xy + y^3$.
   n) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 4}$.
   ñ) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2-6y)}$.
   o) $f(x,y) = 2x^4 + x^2 + 2xy + 3x + y^2 + 2y + 5$.
   p) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 3x - 2y + 1}$.
   q) $f(x,y) = xye^{\frac{16x^2+9y^2}{288}}$.
   r) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{y^2-x^2}$.
   s) $f(x,y) = x\ln\dfrac{y^2}{x} + 3x - xy^2$.
   t) $f(x,y) = 4xy - 2x^4 - y^2 + 4x - 2y$.
   u) $f(x,y) = x^3 + x^2y + x - y$.
   v) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y$.
   w) $f(x,y) = xy(x-y) + y^2 - 4y$.
   x) $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^3 - y$.
   y) $f(u,v) = u^3 + v^3 - 3uv^2 - 3u + 7$.

---

2. Una empresa tiene tres factorías que producen el mismo artículo. Sean x, y, z, respectivamente, los números de unidades que producen cada una de las tres factorías para cubrir un pedido total de 2 000 unidades. Las funciones de costes de las tres factorías son

$$C_1(x) = 200 + \frac{1}{100}x^2, \qquad C_2(y) = 200 + y + \frac{1}{300}y^3, \qquad C_3(z) = 200 + 10z.$$

   El coste total de producir el pedido es

$$C = C_1(x) + C_2(y) + C_3(z).$$

Halle los valores x, y y z que minimizan a C. (**Indicación:** Reducir el problema a uno en sólo dos variables despejando z de $x + y + z = 2\ 000$).

---

3. Si x, y y z son números positivos tales que $x + 3y + 4z = 108$, halle el valor máximo del producto $P = xyz$. (**Indicación:** Convertir P en una función de y, z eliminando la variable x).

---

4. Los beneficios anuales (en millones de dólares) de una empresa están dados por

$$P(x, y) = -x^2 - y^2 + 22x + 18y - 102,$$

donde x es la cantidad invertida en investigación (en millones de dólares) e y es el gasto publicitario (también en millones de dólares).

a) Halle los beneficios cuando $x = 10, y = 8$ y cuando $x = 12, y = 10$.

b) Halle los valores x e y que maximizan los beneficios, junto con el beneficio correspondiente.

---

5. Una tienda vende dos marcas de camisas competidoras, una de ellas apoyada por Tim Duncan y la otra por Shaq O'Neal. El propietario de la tienda puede obtener ambos tipos a un costo de \$2 por camisa y estima que si las camisas Duncan se venden en x dólares por pieza, y las camisas O'Neal en y dólares por pieza, los consumidores comprarán aproximadamente $40 - 50x + 40y$ camisas Duncan y $20 + 60x - 70y$ camisas O'Neal todos los días. ¿A qué precio debe vender el propietario las camisas para generar la máxima utilidad posible?

---

6. Una compañía telefónica está planeando introducir dos nuevos tipos de sistemas ejecutivos de comunicación que espera vender a sus clientes comerciales más importantes. Se estima que si al primer tipo de sistema se aplica un precio de x cientos de dólares por sistema, y al segundo tipo, de y cientos de dólares por sistema, aproximadamente $40 - 8x + 5y$ consumidores comprarán el primer tipo y $50 + 9x - 7y$ comprarán el segundo tipo. Si el costo de fabricación del primer tipo es \$1 000 por sistema y el costo de fabricar el segundo tipo es \$3 000 por sistema, ¿qué precio debe aplicar la compañía telefónica a sus sistemas para generar la máxima utilidad posible?

---

7. Una compañía produce x unidades de la mercancía A y y unidades de la mercancía B. Todas las unidades se pueden vender en $p = 100 - x$ dólares por unidad de A y $q = 100 - y$ dólares por unidad de B. El costo (en dólares) de producir estas unidades está dado por la función costo conjunto $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$. ¿Qué valor deben tener x y y para maximizar la utilidad?

---

8. Repita el problema anterior para el costo donde $p = 20 - 5x$, $q = 4 - 2y$, y $C = 2xy + 4$.

---

9. Un fabricante está planeando vender un nuevo producto a un precio de \$150 por unidad, y estima que si x miles de dólares se gastan en desarrollo y y miles de dólares en promoción, los consumidores comprarán aproximadamente
$$\frac{320y}{y+2} + \frac{160x}{x+4}$$
unidades del producto. Si los costos de manufactura para este producto son \$50 por unidad, ¿cuánto debe gastar el fabricante en desarrollo y cuánto en promoción para generar la máxima utilidad posible por la venta de este producto?

---

10. Un fabricante con derechos exclusivos sobre una nueva máquina industrial está planeando vender un número limitado de ellas y estima que si se ofertan x máquinas al mercado nacional y y al mercado extranjero, las máquinas se venderán en $150 - x/6$ miles de dólares cada una en el mercado nacional y en $100 - y/20$ miles de dólares cada una en el extranjero.

    a) ¿Cuántas máquinas debe ofertar el fabricante al mercado nacional para generar la máxima utilidad posible en el país?

    b) ¿Cuántas máquinas debe ofertar el fabricante al mercado extranjero para generar la máxima utilidad posible en el extranjero?

    c) ¿Cuántas máquinas debe ofertar el fabricante a cada uno de estos mercados para generar la máxima utilidad total posible?

---

11. La Corporación de cremas dentífricas orgánicas produce crema para dientes en dos tamaños, de 100 y 150 mililitros. El costo de producción de cada tubo de cada tamaño es de 60¢ y 90¢, respectivamente. Las demandas semanales x_1 y x_2 (en miles) para los dos tamaños son de
$$x_1 = 3(p_2 - p_1)$$
$$x_2 = 320 + 3p_1 - 5p_2$$
donde p_1 y p_2 son los precios en centavos de los tubos. Determine los precios p_1 y p_2 que maximizarían las utilidades de la compañía.

---

12. Una empresa produce dos tipos de productos, A y B. El costo diario total (en dólares) de producir x unidades de A y y unidades de B está dado por $C(x, y) = 250 - 4x - 7y + 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2$. Determine el número de unidades de A y B que la empresa debe producir al día con el propósito de minimizar el costo total.

---

13. Si x denota la producción de la empresa (en cientos) y y la cantidad gastada (en miles de dólares) en los esfuerzos promocionales de vender el producto, entonces la utilidad de la empresa P (en miles de dólares) está dada por $P(x, y) = 16x + 12y + 2xy - x^2 - 2y^2 - 7$. ¿Qué valores de x y y producirán la utilidad máxima?¿Cuál es la utilidad máxima?

---

14. Una empresa utiliza dos tipos de materias primas, X y Y, en su producto. Usando x unidades de X y y unidades de Y, la empresa puede elaborar P unidades del producto, con $P = 0{,}52x + 0{,}48y + 0{,}12xy - 0{,}07x^2 - 0{,}06y^2$. Si el costo de cada unidad de X es de \$5,10 y de \$1,80 por cada unidad utilizada de Y, y la empresa puede vender todas las unidades que produce a \$15 cada una. ¿Qué cantidades de X y Y debería utilizar la empresa con el propósito de maximizar sus utilidades?

---

15. La compañía occidental de dulces produce caramelos en dos tamaños a costos unitarios de 10¢ y 20¢ cada uno. Las demandas semanales x_1 y x_2 (en miles) para los dos tamaños están dadas por

$$x_1 = p_2 - p_1$$
$$x_2 = 60 + p_1 - 3p_2$$

en donde p_1 y p_2 denotan los precios en centavos de los caramelos en los dos tamaños. Determine los precios p_1 y p_2 que maximizarían las utilidades semanales de la empresa.

---

16. Juguetes Mónica produce dos tipos diferentes de cochecitos de plástico con un costo de 10¢ y \$30¢ cada uno. Las demandas anuales x_1 y x_2 (en miles) están dadas por

$$x_1 = 30 + 2p_2 - 5p_1$$
$$x_2 = 100 + p_1 - 2p_2$$

con p_1 y p_2 los precios unitarios (en centavos) de los dos tipos de cochecitos. Determine los precios p_1 y p_2 que la compañía debe fijar para maximizar sus utilidades.

---

17. A una compañía le cuesta \$2 por unidad elaborar su producto. Si A dólares se gastan por mes en publicidad, entonces el número de unidades por mes que se venderá está dado por $x = 30(1 - e^{-0{,}001A})(22 - p)$ en donde p es el precio de venta. Halle los valores de A y p que maximizarán la utilidad mensual neta de la empresa y calcule el valor de esta utilidad máxima.

---

18. Con el objetivo de fabricar x artículos por semana, la función de costo semanal de una empresa es $C(x) = 50 + \frac{20}{3}x + \frac{1}{60}x^2$. Si A dólares por semana se gastan en publicidad, el precio p (en dólares) en que la demanda será de x artículos por semana está dado por

$$p = 20 - \frac{x}{60(1 - e^{-0{,}001A})}.$$

Determine los valores de x y A que maximizan la utilidad semanal y calcule esta utilidad máxima.

---

19. Un monopolista vende dos productos competitivos A y B, para los cuales las funciones de demanda son

$$q_A = 3 - p_A + 2p_B,$$
$$q_B = 5 + 5p_A - 2p_B.$$

Si el costo promedio constante de producir una unidad de A es 3 y para una unidad de B es 2, ¿cuántas unidades de A y de B deben venderse para maximizar la utilidad del monopolista?

---

20. Un monopolista vende dos productos competitivos, A y B, cuyas ecuaciones de demanda son

$$\begin{aligned} p_A &= 35 - 2q_A^2 + q_B, \\ p_B &= 20 - q_B + q_A. \end{aligned}$$

La función de costos conjuntos es

$$c = -8 - 2q_A^3 + 3q_Aq_B + 30q_A + 12q_B + \frac{1}{2}q_A^2.$$

a) ¿Cuántas unidades de A y B tienen que venderse para que el monopolista obtenga una utilidad máxima relativa?

b) Determine los precios de venta requeridos para obtener la utilidad máxima. Encuentre también esta utilidad máxima relativa.

---

21. Un detallista ha determinado que el número de aparatos de televisión que puede vender por semana es

$$\frac{5x}{2+x} + \frac{2y}{5+y}$$

donde x y y representan sus gastos semanales (en dólares) por publicidad en periódicos y radio, respectivamente. La utilidad es de \$250 por venta menos el costo de la publicidad, de modo que su utilidad semanal está dada por la fórmula

$$P = 250\left[\frac{5x}{2+x} + \frac{2y}{5+y}\right] - x - y.$$

Encuentre los valores de x y y para los cuales la utilidad es un máximo relativo.

---

22. Suponga que la función de utilidad

$$U(x, y) = -2x^2 - 3y^2 + ax + by + c$$

tiene un valor máximo de 30 cuando $x = 2$ y $y = 4$. Determine los valores de las constantes a, b y c.

---

23. Suponga que la función de costos conjuntos

$$C(q_A, q_B) = q_A^2 + 3q_B^2 + 2q_Aq_B + aq_A + bq_B + d$$

tiene un valor mínimo de 15 cuando $q_A = 3$ y $q_B = 1$. Determine los valores de las constantes a, b y d.

---

24. La producción de una fábrica está dada por

$$P(l,k) = 0.54l^2 - 0.015l^3 + 0.84k^2 - 0.04k^3$$

donde l y k son las unidades de mano de obra y de capital, respectivamente.

a) ¿Cuántas unidades de l y k maximizarían la producción?

b) ¿Cuál es la producción máxima de la fábrica?

---

25. Encuentre el volumen máximo de una caja rectangular inscrita en una esfera de radio $\sqrt{3}$.

---

26. La única tienda de abarrotes en una pequeña comunidad rural vende dos marcas de jugo congelado de manzana: una marca local, que obtiene a un costo de 40 centavos por lata, y una bien conocida marca nacional que obtiene a un costo de 30 centavos por lata. El abarrotero estima que si la marca local se vende a x centavos por lata y la marca nacional a y centavos por lata, entonces todos los días se venderán aproximadamente $80 - 7x + 6y$ latas de la marca local y $70 + 4x - 5y$ latas de la marca nacional.

a) Verifique que la función utilidad está dada por

$$U(x,y) = -7x^2 + 240x - 5y^2 - 20y + 10xy - 5\,300.$$

b) ¿Qué precio debe aplicar el abarrotero a cada marca para maximizar la utilidad por la venta del jugo?

---

27. En cierta oficina, las computadoras C y D se utilizan c y d horas, respectivamente. Si la producción diaria Q es una función de c y d, a saber

$$Q = 18c + 20d - 2c^2 - 4d^2 - cd.$$

Los valores de c y d que maximizan a Q son:

○ $c = 3, \quad d = 2$ ○ $c = 3, \quad d = 3$ ○ $c = 2, \quad d = 4$ ○ $c = 4, \quad d = 2$

---

28. El total de los ingresos semanales (en dólares) que Acrosonic obtiene al fabricar y vender sus sistemas de estantes con altavoces está dada por:

$$I(x,y) = -\frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y,$$

donde x denota el número completo de unidades ensambladas y y el número de kits fabricados y vendidos cada semana. El total del costo semanal atribuible a la fabricación de estos altavoces es

$$C(x,y) = 180x + 140y + 5000, \quad \text{(en dólares)}$$

en donde x y y tienen el mismo significado como antes. Las unidades ensambladas y los kits que debería fabricar Acrosonic por semana para maximizar sus utilidades son:

◯ $x = 108, \quad y = 104$ ◯ $x = 208, \quad y = 64$ ◯ $x = 64, \quad y = 208$ ◯ $x = 200, \quad y = 72$

---

29. Suponga que un monopolista practica la discriminación del precio en la venta de un producto, y cobra diferentes precios en dos mercados separados. En el mercado A la función de demanda es

$$p_A = 100 - q_A$$

y en el mercado B es

$$p_B = 84 - q_B,$$

donde q_A y q_B son las cantidades vendidas por semana de A y de B, p_A y p_B son los precios respectivos por unidad. Si la función de costo del monopolista es

$$C = 600 + 4(q_A + q_B).$$

Responda:

a) ¿Cuánto debe venderse en cada mercado para maximizar la utilidad?

◯ $q_A = 48, \; q_B = 40$ ◯ $q_A = 40, \; q_B = 40$ ◯ $q_A = 40, \; q_B = 48$ ◯ $q_A = 38, \; q_B = 50$

b) ¿Qué precios de venta dan la utilidad máxima?

◯ $p_A = 48, \; p_B = 50$ ◯ $p_A = 42, \; p_B = 44$ ◯ $p_A = 48, \; p_B = 54$ ◯ $p_A = 52, \; p_B = 44$

c) La utilidad máxima es:

◯ 3044 ◯ 3304 ◯ 3240 ◯ 3344

---

30. Las dimensiones del rectángulo con área máxima que tiene un perímetro de 20 centímetros son: 6 centímetros de largo y 4 centímetros de ancho.

◯ Verdadero ◯ Falso

Referencias

[1] J. C. Arya, R. W. Lardner, and V. H. Ibarra. *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía.* Pearson, quinta edición, 2009.

[2] E. F. Haeussler, R. S. Paul, and R. J. Wood. *Matemáticas para administración y economía.* Pearson, décimo tercera edición, 2015.

[3] L. Hoffmann, G. Bradley, and K. H. Rosen. *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales.* McGraw-Hill Interamericana, octava edición, 2006.

[4] K. Sydsaeter and P. Hammond. *Matemáticas para el análisis económico.* Prentice Hall, 1996.

[5] J. E. Weber. *Matemáticas para administración y economía.* Harla, cuarta edición, 1984.