Departamento de Matemáticas y Estadística
Taller de preparación para el Parcial II
Cálculo II (ANEC)

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca parte de la temática del segundo corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. El documento está basado en ejercicios de los textos [1], [2], [3], [4] y [5].

---

1. Mediante el método de multiplicadores de Lagrange, determine los puntos critícos de f sujetos a las restricciones dadas.

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $2x + 3y = 7$.
   b) $f(x,y) = -3x^2 - 2y^2 + 20xy$; $x + y = 100$.
   c) $f(x,y) = x^2 + 3xy - 6y$; $x + y = 42$.
   d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$; $2x + 3y = 31$.
   e) $f(x,y) = 3x + 2y$; $x^2 + y^2 = 13$.
   f) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$; $xy = \sqrt{6}$.
   g) $f(x,y,z) = x + y + z$; $xyz = 8$.
   h) $f(x,y) = xyz$; $x + 2y + 3z = 18$ $(xyz \neq 0)$.
   i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 3$.
   j) $f(x,y,z) = xyz$; $xy + yz + 2xz = 24$ $(xyz \neq 0)$.

---

2. Use el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar el extremo relativo indicado (puede suponer que tal extremo existe).

   a) Encuentre el valor máximo de $f(x,y) = xy$ sujeto a la restricción $x + y = 1$.
   b) Encuentre los valores máximo y mínimo de la función de $f(x,y) = xy$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.
   c) Encuentre el valor mínimo de la función de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeto a la restricción $xy = 1$.
   d) Encuentre el valor mínimo de la función de $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$ sujeto a la restricción $2x + y = 22$.
   e) Encuentre el valor mínimo de la función de $f(x,y) = x^2 - y^2$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 4$.
   f) Encuentre los valores máximo y mínimo de la función de $f(x,y) = 8x^2 - 24xy + y^2$ sujeto a la restricción $8x^2 + y^2 = 1$.
   g) Encuentre los valores máximo y mínimo de la función de $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.
   h) Encuentre el valor máximo de la función de $f(x,y) = xy^2$ sujeto a la restricción $x + y = 1$.
   i) Encuentre el valor mínimo de la función de $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x - 23y + 3$ sujeto a la restricción $x + y = 15$.
   j) Encuentre el valor mínimo de la función de $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 2y + 7$ sujeto a la restricción $4x^2 + 4xy = 1$.
   k) Encuentre los valores máximo y mínimo de la función de $f(x,y) = e^{xy}$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 4$.

l) Encuentre el valor máximo de la función de $f(x,y) = \ln(xy^2)$ sujeto a la restricción $2x^2 + 3y^2 = 8$ para $x > 0$ y $y > 0$.

---

3. La producción P, como función de dos insumos x y y está dada por

$$P = x^2 + 5xy - 4y^2.$$

Evalúe las cantidades de x y y que maximizan la producción si $2x + 3y = 74$.

---

4. El costo de producción C es una función de las cantidades producidas, x y y, de dos tipos de artículos, está dado por

$$C = 6x^2 + 3y^2.$$

Para minimizar tal costo, ¿qué cantidad de cada uno de los dos artículos debe producirse si $x + y = 18$?

---

5. El importe de las ventas S, como función de las sumas x y y gastadas en dos tipos de promoción comercial, está dado por

$$S = \frac{240x}{25 + 3x} + \frac{150y}{10 + y}.$$

La utilidad neta es $U = \frac{1}{10}S - x - y$. Determine la asignación de x y y que maximizará la ganancia neta si $x + y = 15$.

---

6. El costo de las reparaciones, C, en función de los números x y y de inspecciones en dos puntos de un proceso industrial, está dado por

$$C = 2x^2 + 3y^2 + xy - 22x + 5.$$

Para minimizar tal costo, ¿qué número de inspección deberá llevarse a cabo en cada punto si $x - y = 2$?

---

7. La función de producción de una empresa es

$$P(l,k) = 2l^2 + 6k^2 - 24l - 40k,$$

donde el costo de l y k es de \$3 y \$6 por unidad, respectivamente. Si la empresa quiere que el costo total de insumos sea \$12 960, encuentre la producción máxima posible sujeta a este control presupuestario.

---

8. Un consumidor tiene \$280 para gastar en dos mercancías, la primera de las cuales cuesta \$2 por unidad y la segunda cuesta \$5 por unidad. Suponga que la utilidad obtenida por el consumidor por x unidades de la primera mercancía, y y unidades de la segunda mercancía, está dada por la función de utilidad de Cobb–Douglas $U(x,y) = 100x^{0{,}25}y^{0{,}75}$. ¿Cuántas unidades de cada mercancía debe comprar el consumidor para maximizar la utilidad?

---

9. Un consumidor tiene k dólares para gastar en dos mercancías, la primera de las cuales cuesta a dólares por unidad y la segunda cuesta b dólares por unidad. Suponga que la utilidad obtenida por el consumidor por x unidades de la primera mercancía, y y unidades de la segunda mercancía, está dada por la función de utilidad de Cobb–Douglas $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$, donde $0 < \alpha < 1$ y $\alpha + \beta = 1$. Demuestre que la utilidad se maximiza cuando

$$x = \frac{k\alpha}{a} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{k\beta}{b}.$$

---

10. Si se gastan x miles de dólares en mano de obra y se gastan y miles de dólares en equipo, la producción de cierta fábrica será $Q(x, y) = 60x^{1/3}y^{2/3}$ unidades. Si se dispone de \$120 000, ¿cuánto debe asignarse a mano de obra y cuánto a equipo para generar la máxima producción posible?

---

11. Una compañía puede destinar su planta a la elaboración de dos tipos de productos, A y B. Obtiene una utilidad de \$4 por unidad de A y de \$6 por unidad de B. Los números de unidades de los dos tipos que puede producir mediante la planta están restringidos por la ecuación de transformación del producto, que es

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$$

con x y y los números de unidades (en miles) de A y B, respectivamente, producidas por semana. Halle las cantidades de cada tipo que deben producirse a fin de maximizar la utilidad.

---

12. El costo de producir x modelos regulares y y modelos de lujo del producto de una empresa está dado por la función conjunta de costo $C(x, y) = x^2 + 1{,}5y^2 + 300$. ¿Cuántas unidades de cada tipo deben producirse para minimizar los costos totales, si la empresa decide producir un total de 200 unidades?

---

13. La función de producción de una empresa es $P(l, k) = 800\sqrt{3l^2 + 1{,}5k^2}$, en donde l y k representan el número de unidades de mano de obra y de capital utilizadas y P es el número de unidades elaboradas del producto. Cada unidad de mano de obra tiene un costo de \$250 y cada unidad de capital cuesta \$50 y la empresa dispone de \$6 750 destinados a producción. Determine el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe emplear para obtener una producción máxima.

---

14. Una compañía de computadoras tiene un presupuesto mensual para publicidad de \$60 000. Su departamento de mercadotecnia estima que si se gastan x dólares cada mes en publicidad en periódicos y y dólares cada mes en publicidad por televisión, entonces las ventas mensuales estarán dadas por $S = 90x^{1/4}y^{3/4}$ dólares. Si la utilidad es el $10\,\%$ de las ventas, menos el costo de la publicidad, determine cómo asignar el presupuesto publicitario para maximizar la utilidad mensual (Puede suponerse que el punto crítico obtenido corresponde a una utilidad máxima).

---

15. Suponga que la función de producción de un fabricante está dada por

$$16q = 65 - 4(l-4)^2 - 2(k-5)^2$$

y que el costo para el fabricante es de \$8 por unidad de trabajo y de \$16 por unidad de capital, de manera que el costo total (en dólares) es $8l + 16k$. El precio de venta del producto es de \$64 por unidad. La utilidad puede considerarse como una función de l, k y q (esto es, $P = 64q - 8l - 16k$) sujeta a la restricción

$$16q = 65 - 4(l-4)^2 - 2(k-5)^2.$$

Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar todos los puntos críticos de $P = 64q - 8l - 16k$, sujeta a la restricción.

---

16. En negocios, un índice de utilidad U es una función que produce una medida de satisfacción obtenida a partir de la compra de cantidades variables, x y y, de dos productos que se venden regularmente. Si

$$U(x,y) = x^{1/3}y^{2/3}$$

es un índice de utilidad, encuentre el índice de utilidad máxima sujeta a $x + 6y = 18$.

---

17. Suponga que la función de producción de una empresa está dada por

$$P(l,k) = 240l + 900k + 6lk - 9l^2 - 12k^2,$$

donde l y k son las unidades de mano de obra y de capital, respectivamente, y P es la cantidad producida. Cada unidad de l cuesta 24 dólares y cada unidad de k cuesta 36 dólares, y la empresa puede vender todo lo que produce en 45 dólares por unidad.

   a) ¿Cuántas unidades de l y k maximizarían las utilidades de la empresa?

   b) ¿Cuál es la utilidad máxima de la empresa?

---

18. Para surtir una orden de 100 unidades de su producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas, planta 1 y planta 2. La función de costo total está dada por

$$C(q_1,q_2) = 0.1q_1^2 + 7q_1 + 15q_2 + 1\ 000,$$

donde q_1 y q_2 son los números de unidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?

---

19. Una compañía dispone de 1 600 dólares para gastos de publicidad. Se ha determinado que la utilidad obtenida por gastar x dólares en publicidad en radio y y dólares en televisión, es

$$U(x,y) = 4\ln(x^2\sqrt[3]{y}).$$

Cada aviso publicitario en radio y televisión cuestan 60 y 80 dólares, respectivamente.

a) ¿Cómo debe distribuirse el gasto publicitario para maximizar la utilidad?

b) ¿Cuál es la utilidad máxima obtenida?

---

20. La función de producción de Cobb–Douglas para un fabricante de software está dada por

$$f(t,k) = 100t^{3/4}k^{1/4},$$

donde t representa las unidades de trabajo (a 150 por unidad) y k representa las unidades de capital (a 250 por unidad). El costo total del trabajo y capital está limitado a 50 000. El nivel máximo de producción de este fabricante es:

○ $k = 50,\ t = 250$ ○ $k = 80,\ t = 200$ ○ $k = 110,\ t = 150$ ○ $k = 140,\ t = 100$

---

21. La producción P, como función de dos insumos x y y, está dada por

$$P(x,y) = y^2 + 5xy - 4x^2.$$

Si $3x + 2y = 74$, entonces las cantidades de x y de y que maximizan la producción es:

○ $x = 6,\ y = 28$ ○ $x = 12,\ y = 19$ ○ $x = 8,\ y = 25$ ○ $x = 4,\ y = 31$

---

22. El mayor volumen de una caja en forma rectangular cuyas aristas sean paralelas a los ejes coordenados en el espacio, que tenga tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x+2y+3z = 6$ es:

○ $\frac{1}{3}$ unidades cúbicas ○ $\frac{5}{3}$ unidades cúbicas
○ $\frac{2}{3}$ unidades cúbicas ○ $\frac{4}{3}$ unidades c'ubicas

Referencias

[1] J. C. Arya, R. W. Lardner, and V. H. Ibarra. *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía.* Pearson, quinta edición, 2009.

[2] E. F. Haeussler, R. S. Paul, and R. J. Wood. *Matemáticas para administración y economía.* Pearson, décimo tercera edición, 2015.

[3] L. Hoffmann, G. Bradley, and K. H. Rosen. *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales.* McGraw-Hill Interamericana, octava edición, 2006.

[4] K. Sydsaeter and P. Hammond. *Matemáticas para el análisis económico.* Prentice Hall, 1996.

[5] J. E. Weber. *Matemáticas para administración y economía.* Harla, cuarta edición, 1984.